O2-TD

Correction

O2 — 02 Masselotte sur une corde

1) Les ondes réfléchies et transmises ont la même fréquence que l'onde incidente par **linéarité** des équations (un système linéaire excité à une pulsation ω répond avec la même pulsation, « il ne créé pas de nouvelles fréquences »). Les vecteurs d'onde sont alors identiques puisqu'égaux à ω/c, et c est identique des deux côtés de la masselotte car il s'agit de la même corde (même tension, même masse linéïque). Enfin, l'onde transmise **se propage vers les x croissants** donc elle s'écrit avec une phase $\omega\,t - k\,x$, tandis que l'onde réfléchie **se propage en sens inverse** donc s'écrit avec une phase $\omega\,t + k\,x$.

2) On commence par traduire la continuité de la corde : l'amplitude à gauche en $x = 0$ doit être égale à celle à droite en $x = 0$. On écrit

$$\underline{y_g}(x=0,\,t) = \underline{y_d}(x=0,\,t) \qquad \text{soit} \qquad \underline{y_i}(x=0,\,t) + \underline{y_r}(x=0,\,t) = \underline{y_t}(x=0,\,t)$$

Cela se traduit, après simplification par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,t}$, par

$$A_i + \underline{A_r} = \underline{A_t} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{1 + \underline{r} = \underline{t}}$$

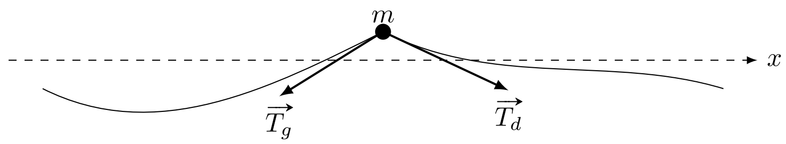
Par ailleurs, il nous faut écrire une deuxième équation traduisant la présence de la masselotte. Pour cela, nous pouvons lui appliquer le principe fondamental de la dynamique. Elle a un mouvement vertical et suit la corde, si bien que son accélération (en complexe) s'écrit

$$\frac{\partial^2 \underline{y_t}}{\partial t^2}(x=0,\,t)\,\vec{e_y} \qquad \text{ou de manière identique} \qquad \frac{\partial^2 (\underline{y_i}+\underline{y_r})}{\partial t^2}(x=0,\,t)\,\vec{e_y}$$

Quant aux forces en jeu, la masselotte est soumise à son poids a priori, mais on négligera celui-ci, et aux tensions de la corde de gauche et de droite. Les projections de celles-ci sur l'axe y ont pour expressions respectivement

$$\vec{\underline{T_g}}\cdot\vec{e_y} = -\vec{\underline{T}}(0^-,\,t)\cdot\vec{e_y} = -T_0\,\frac{\partial(\underline{y_i}+\underline{y_r})}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \vec{\underline{T_d}}\cdot\vec{e_y} = +\vec{\underline{T}}(0^+,\,t)\cdot\vec{e_y} = T_0\,\frac{\partial \underline{y_t}}{\partial x}$$

en notant $\vec{T}$ la tension sur la corde, et en utilisant que $T_y = T_0\,\partial y\,/\,\partial x$.



Finalement, le PFD appliqué à la masselotte projeté sur y s'écrit

$$m\,\frac{\partial^2 \underline{y_t}}{\partial t^2}(x=0,\,t) = T_0\left(\underbrace{-\frac{\partial(\underline{y_i}+\underline{y_r})}{\partial x}(x=0,\,t)}_{\text{tension à gauche}} + \underbrace{\frac{\partial \underline{y_t}}{\partial x}(x=0,\,t)}_{\text{et à droite}}\right)$$

c'est-à-dire

$$-m\,\omega^2\underline{y_t} = T_0\left(\mathrm{i}\,k\,(\underline{y_i}-\underline{y_r}) - \mathrm{i}\,k\,\underline{y_t}\right) \qquad \text{en} \qquad x = 0$$

soit, après simplifications,

$$\boxed{\left(1 + \mathrm{i}\,\frac{m\,\omega^2}{T_0\,k}\right)\underline{t} = 1 - \underline{r}}$$

Finalement, nous avons deux équations pour deux inconnues

$$\boxed{\begin{cases} 1 + \underline{r} = \underline{t} \\ 1 - \underline{r} = f(\omega)\,\underline{t} \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad f(\omega) = 1 + \mathrm{i}\,\frac{m\,\omega^2}{k\,T_0}}$$

qui se résolvent en

$$\boxed{\underline{r} = \frac{-1}{1 - 2\,\mathrm{i}\,T_0\,k\,/\,(m\,\omega^2)} \qquad \text{et} \qquad \underline{t} = \frac{-2\,\mathrm{i}\,T_0\,k\,/\,(m\,\omega^2)}{1 - 2\,\mathrm{i}\,T_0\,k\,/\,(m\,\omega^2)}}$$

On peut commenter deux cas limites. Si $m \gg T_0\,k\,/\,\omega^2$, on a $\underline{r} \to -1$ et $\underline{t} \to 0$. La masse est très lourde. L'onde, incapable de mettre la masse en mouvement, est complètement réfléchie en opposition de phase. Si au contraire $m \ll T_0\,k\,/\,\omega^2$, on a $\underline{r} \to 0$ et $\underline{t} \to 1$. La masse est très petite, l'onde est complètement transmise comme si il n'y avait pas de masse, donc pas de discontinuité sur la corde.