MQ1-TD

Correction

MQ1 — 05 Oscillateur harmonique quantique

1) L'équation de Schrödinger stationnaire pour l'oscillateur harmonique est

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}(x)+\frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,x^2\,\varphi(x)=E\,\varphi(x)}$$

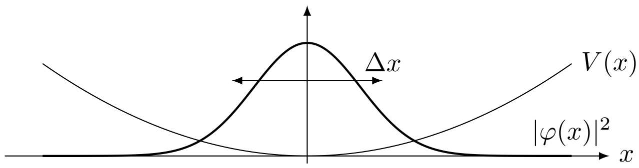
2) *Commentons que la solution proposée correspond à l'état fondamental. Il en existe plein d'autres correspondant aux niveaux excités.* $\mathcal{N}$ se détermine par la condition de normalisation

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x=1\qquad\text{soit}\qquad\mathcal{N}^2\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2\,(x\,/\,a)^2}\,\mathrm{d}x=1$$

Grâce au formulaire sur les intégrales gaussiennes, on conclut

$$\boxed{\mathcal{N}=\left(\frac{2}{\pi\,a^2}\right)^{1/4}}$$

3) La densité de probabilité est $|\varphi(x)|^2$ donc ici $\mathcal{N}^2\,\mathrm{e}^{-2\,(x\,/\,a)^2}$. Il s'agit d'une fonction gaussienne, valant $\mathcal{N}^2$ en 0 et tendant vers 0 en $\pm\infty$. Son allure est la suivante



Par symétrie, **la position moyenne de l'oscillateur est** $x=0$.

4) L'état stationnaire que nous étudions vérifie l'équation de Schrödinger stationnaire. On calcule progressivement

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=-\frac{2\,\mathcal{N}\,x}{a^2}\,\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)\qquad\text{et}\qquad\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{2\,\mathcal{N}}{a^2}\left(1-\frac{2\,x^2}{a^2}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

alors, en reconstituant l'équation de Schrödinger stationnaire,

$$\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\frac{2\,\mathcal{N}}{a^2}\left(1-\frac{2\,x^2}{a^2}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)+\frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,x^2\,\mathcal{N}\,\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)=E\,\mathcal{N}\,\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

en divisant par $\varphi(x)=\mathcal{N}\,\exp\left(-x^2\,/\,a^2\right)$ non nulle, et en réarrangeant les termes, on aboutit à

$$\left(\frac{\hbar^2}{m\,a^2}-E\right)+\left(\frac{1}{2}\,m\,\omega^2-\frac{2\,\hbar^2}{m\,a^4}\right)x^2\;=0$$

Il s'agit d'un polynôme en x, **nul pour tout** x. En conséquence, chacun des monômes sont nuls d'où

$$E=\frac{\hbar^2}{m\,a^2}\qquad\text{et}\qquad a^4=\frac{m^2\,\omega^2}{4\,\hbar^2}$$

et on déduit ainsi

$$\boxed{E=\frac{1}{2}\,\hbar\,\omega\qquad\text{et}\qquad a=\sqrt{\frac{2\,\hbar}{m\,\omega}}}$$

5) La position moyenne est nulle $\langle x\rangle=0$ (on intègre de $-\infty$ et $+\infty$ une fonction impaire...). Le calcul de $\langle x^2\rangle$ utilise le formulaire

$$\langle x^2\rangle=\mathcal{N}^2\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\,\exp\left(-\frac{2\,x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=\mathcal{N}^2\,\frac{a^2}{4}\,\sqrt{\frac{\pi\,a^2}{2}}=\frac{a^2}{4}$$

d'où finalement

$$\boxed{\Delta x=\frac{a}{2}}$$

Sa signification est la largeur typique sur laquelle la densité de probabilité est conséquente, voir schéma.