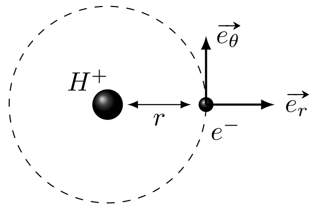
**MQ1-TD**

# Correction

## MQ1 — 04 Atome de Bohr




**1)** (*On suppose que l'atome est complètement isolé dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Ne subissant aucune force, il est en translation rectiligne uniforme dans ce référentiel, et par conséquent lui-même galiléen*). On considère comme système l'électron de masse $m$ et de charge $-e$, dans le référentiel du noyau supposé galiléen. Il est uniquement soumis à l'attraction coulombienne du noyau $H^+$ de charge $+e$. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron s'écrit donc

$$m\,\vec{a} = -\frac{e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,\vec{e_r}$$

La trajectoire étant circulaire uniforme (modèle planétaire), on a

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\,\vec{e_r} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{v = \sqrt{\frac{e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,m\,r}}}$$

**2)** Son moment cinétique est

$$\vec{L} = r\,\vec{e_r} \wedge m\,v\,\vec{e_\theta} = m\,r\,v\,\vec{e_z} = \sqrt{\frac{e^2\,m\,r}{4\,\pi\,\varepsilon_0}}\,\vec{e_z} = L\,\vec{e_z}$$

Dans le modèle de Bohr, sa norme est quantifiée. Elle ne peut prendre comme valeur qu'un nombre entier de fois $\hbar$.

$$L = \sqrt{\frac{e^2\,m\,r}{4\,\pi\,\varepsilon_0}} = n\,\hbar \qquad \text{soit} \qquad \boxed{r_n = n^2\,\frac{4\,\pi\,\varepsilon_0\,\hbar^2}{m\,e^2} = n^2\,r_1}$$

où on identifie le **rayon de Bohr**

$$\boxed{a_0 = r_1 = \frac{4\,\pi\,\varepsilon_0\,\hbar^2}{m\,e^2} = 0,52 \times 10^{-10}\ \text{m} = 0,52\ \text{Å}}$$

et en utilisant l'expression du moment cinétique, on a immédiatement

$$m\,r_n\,v_n = n\,\hbar \qquad \text{soit} \qquad v_n = \frac{n\,\hbar}{m\,r_n}$$

La vitesse de l'électron sur l'orbite $n = 1$ est

$$\boxed{v_1 = \frac{\hbar}{m\,a_0} = 2,2 \times 10^6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

qui est bien inférieure à $c = 3 \times 10^8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. L'électron n'est donc pas relativiste.

**3)** L'électron a pour énergie mécanique

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}\,m\,v^2 - \frac{e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r} = -\frac{1}{2}\,\frac{e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r}$$

en utilisant l'expression de $v$ en fonction de $r$. Sur l'orbite $n$, elle vaut donc

$$E_n = -\frac{1}{2}\,\frac{e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r_n} \qquad \text{soit} \qquad E_n = -\frac{1}{2}\,\frac{m\,e^4}{(4\,\pi\,\varepsilon_0)^2\,\hbar^2}\,\frac{1}{n^2}$$

d'où finalement

$$\boxed{E_n = -\frac{E_0}{n^2} \qquad \text{avec} \qquad E_0 = \frac{m\,e^4}{2\,(4\,\pi\,\varepsilon_0)^2\,\hbar^2} = 2,2 \times 10^{-18}\ \text{J} = 13,6\ \text{eV}}$$

Nous venons de prouver à partir du modèle de Bohr **la quantification des énergies de l'atome d'hydrogène**.

4) Par conservation de l'énergie, l'énergie de l'atome avant désexcitation $E_m$ est égal à l'énergie de l'atome après désexcitation $E_n$ plus l'énergie du photon émis, soit

$$E_m = E_n + h\,\nu$$

avec $\nu = c\,/\,\lambda$ la fréquence du photon émis. Par conséquent,

$$\frac{1}{\lambda_{nm}} = \frac{E_m - E_n}{h\,c} = \frac{E_0}{h\,c}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

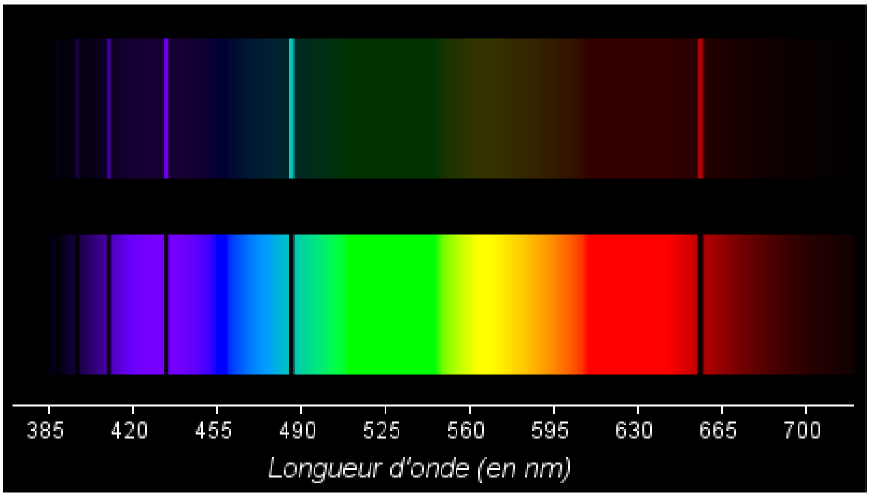
On identifie

$$\boxed{R_{\mathrm{H}} = \frac{E_0}{h\,c}}$$

5) On calcule

$$\boxed{\lambda_{62} = 411\text{ nm}, \qquad \lambda_{52} = 434\text{ nm}, \qquad \lambda_{42} = 487\text{ nm} \qquad \text{et} \qquad \lambda_{32} = 657\text{ nm}.}$$

Ce sont toutes des raies dans le domaine du visible, respectivement violette, bleue, bleue ciel et rouge. Elles sont appelées **raies de Balmer** et sont présentées ci-dessous, en émission (en haut) et en absorption (en bas).




6) L'idée du modèle de Bohr est de conserver la notion de trajectoire pour l'électron, et de supposer de manière empirique la quantification de son moment cinétique. Une telle approche n'est pas viable, puisqu'on va montrer que les inégalités de Heisenberg sont incompatibles avec l'idée de trajectoire (position et vitesse bien définies) pour l'électron.

Déjà, sur l'orbite $n = 1$, on a $L_1 = m\,r_1\,v_1 = \hbar$ en norme, et puisque $p_1 = m\,v_1$, alors

$$p_1 = \frac{\hbar}{r_1}$$

Ensuite, pour pouvoir définir une « trajectoire », il faut que les indéterminations de Heisenberg $\Delta r$ et $\Delta p$ soient petites devant les grandeurs associées $r_1$ et $p_1$, c'est-à-dire qu'elles doivent vérifier

$$\begin{cases} \Delta r & \ll & r_1 \\ \Delta p & \ll & p_1 \end{cases}$$

Alors, en utilisant la deuxième condition, il faut

$$r_1 \ll \frac{\hbar}{\Delta p}$$

Or l'inégalité de Heisenberg donne

$$\Delta r\,\Delta p \gg \frac{\hbar}{2} \qquad \text{soit} \qquad \Delta p \gg \frac{\hbar}{2\,\Delta r}$$

donc $\hbar\,/\,\Delta p \ll 2\,\Delta r$. Finalement

$$r_1 \ll 2\,\Delta r$$

évidemment incompatible avec $\Delta r \ll r_1$. Il est ainsi, du fait des inégalités de Heisenberg, impossible de parler de « trajectoire » pour l'électron. La description quantique passe par l'utilisation de la **fonction d'onde**. La position et la vitesse de la particule n'ayant plus de sens.