MQ1-TD

Correction

MQ1 — 03 Évolution d'un état non stationnaire

1) Une particule libre n'est soumise à aucun potentiel. Les parties spatiales des états stationnaires vérifient donc l'équation de Schrödinger indépendante du temps suivante

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi_1}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{2\,m\,E_1}{\hbar^2}\,\varphi_1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}^2\varphi_2}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{2\,m\,E_2}{\hbar^2}\,\varphi_2$$

Ce sont les équations d'un oscillateur harmonique, dont on écrit les solutions sous forme d'exponentielles complexes

$$\boxed{\varphi_1^{\text{libre}} = A\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k_1\,x} + B\,\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\,k_1\,x} \qquad \text{avec} \qquad k_1 = \sqrt{\frac{2\,m\,E_1}{\hbar}}}$$

et idem pour φ_2^{libre}. Il suffit ensuite de remultiplier par la partie temporelle $\exp(-\mathrm{i}\,E_1\,t\,/\,\hbar)$ pour obtenir la fonction d'onde complète

$$\boxed{\Psi_1^{\text{libre}} = A\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,(k_1\,x+\omega_1\,t)} + B\,\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\,(k_1\,x-\omega_1\,t)} \qquad \text{avec} \qquad \omega_1 = \frac{E_1}{\hbar}}$$

et idem pour Ψ_2^{libre}. Ce sont des OPPH. (*Ce qu'on savait puisque c'est du cours : les états stationnaires d'une particule libre sont les OPPH*).

2) Si la particule est dans l'état Ψ_1, alors sa densité de probabilité de présence en x est

$$|\Psi_1(x,t)|^2 = |\varphi_1(x)\,\exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_1\,t}{\hbar}\right)|^2 = |\varphi_1(x)|^2 \qquad \text{car} \qquad |\exp(\mathrm{i}\,a)|^2 = 1 \qquad \text{pour } a \text{ réel.}$$

qui est **indépendante de** t (*À nouveau c'est du cours : la probabilité de présence ne dépend pas du temps pour un état stationnaire).*

3) Si la particule est dans l'état $\Psi_1 + \Psi_2$, alors sa densité de probabilité de présence en x est par définition $|\Psi_1 + \Psi_2|^2$ qu'on calcule comme

$$|\Psi_1 + \Psi_2|^2 = \big(\Psi_1 + \Psi_2\big)\,\big(\Psi_1 + \Psi_2\big)^* = \big(\Psi_1 + \Psi_2\big)\,\big(\Psi_1^* + \Psi_2^*\big) = \Psi_1\,\Psi_1^* + \Psi_2\,\Psi_2^* + 2\,\mathrm{Re}\big(\Psi_1\,\Psi_2^*\big)$$

On obtient

$$\boxed{|\Psi_1 + \Psi_2|^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + 2\,\varphi_1\,\varphi_2\,\cos\left(\frac{E_1 - E_2}{\hbar}\,t\right)}$$

qui prend une forme tout à fait similaire à la **formule de Fresnel pour les interférences à deux ondes**

$$I_{\text{tot}} = I_1 + I_2 + 2\,\sqrt{I_1\,I_2}\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,\delta}{\lambda}\right)$$