MQ1-TD

# Correction

## MQ1 — 01 Petites questions indépendantes

**1)** La fonction d'onde $\psi(x,t)$ est telle que la probabilité de trouver la particule en $x$ à $\mathrm{d}x$ près (autrement dit, entre $x$ et $x+\mathrm{d}x$) à $t$ est

$$\mathrm{d}P(x,t) = |\psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x$$

Son module carré est donc la densité (linéïque) de probabilité de présence $\mathrm{d}P\,/\,\mathrm{d}x$. Les états stationnaires d'une particule libre sont les OPPH

$$\psi(x,t) = \psi_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\,x \pm \omega\,t)} \qquad \text{avec} \qquad \omega = \frac{E}{\hbar} \qquad \text{et} \qquad E = \frac{\hbar^2\,k^2}{2\,m}$$

La première relation est une relation de De Broglie et la deuxième est la relation de dispersion de l'équation de Schrödinger pour une particule libre (potentiel $V=0$). Ces états ne sont pas physiques car non-normalisables (ils ne peuvent pas respecter pas la condition de normalisation). La description d'une particule libre se fait donc par un **paquet d'onde** : une somme continue de plein d'OPPH.

**2)** $\Delta x\,\Delta p_x \geqslant \hbar\,/\,2$. Si la position de la particule est parfaitement connue, alors l'indétermination sur celle-ci est nulle $\Delta x = 0$, et donc l'indétermination sur sa quantité de mouvement (donc sa vitesse) est infinie $\Delta p_x = \infty$. Sa vitesse est donc complètement indéterminée. La notion de trajectoire n'a plus de sens.

**3)** Elle s'écrit avec $V=0$

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

En remettant une OPPH

$$\psi(x,t) = \psi_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\,x \pm \omega\,t)}$$

dedans, on aboutit à

$$\omega = \frac{\hbar\,k^2}{2\,m}$$

qui est la relation de dispersion de l'équation de Schrödinger d'une particule libre. Remarquons qu'en multipliant à gauche et à droite par $\hbar$ et en utilisant les relations de De Broglie, on obtient

$$E = \frac{p^2}{2\,m} = \frac{1}{2}\,m\,v^2$$

**4)** $V$ est l'énergie potentielle. Directement

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\,k\,x^2\,\psi = \mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

**5)** Un état stationnaire est un état de la forme $\psi(x,t) = \varphi(x)\,f(t)$. On a montré dans le cours que la partie temporelle $f(t)$ est forcément une exponentielle complexe

$$f(t) = f_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E\,t\,/\,\hbar}$$

En mettant cette expression pour $\psi$ dans l'équation de Schrödinger, on montre que la partie spatiale vérifie l'équation de Schrödinger indépendante du temps `[À savoir faire!]`

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\frac{\mathrm{d}^2\varphi(x)}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\,\varphi(x) = E\,\varphi(x)$$

**6)** On envoie des électrons un par un sur une bifente d'Young. À l'écran derrière, on observe l'apparition d'un motif d'interférence qui se construit impact après impact. Les analogies sont

$$\text{fonction d'onde } \psi \;\leftrightarrow\; \text{amplitude lumineuse } a$$

$$\text{Densité de probabilité } |\psi|^2 \;\leftrightarrow\; \text{intensité lumineuse } I \propto |a|^2$$