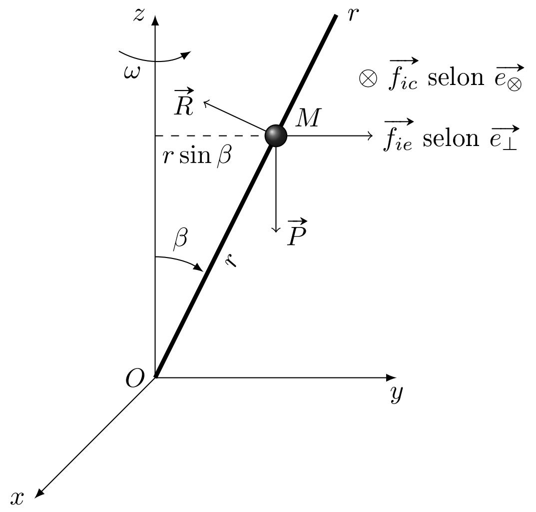
M2-TD

Correction

M2 — 12 Masselotte sur une tige en rotation

1) Dans le référentiel de la tige, en rotation uniforme autour de l'axe (Oz) fixe par rapport au référentiel du laboratoire considéré galiléen, on étudie la masselotte de masse m.



Celle-ci est soumise à
- son poids $\overrightarrow{P} = -m\,g\,\overrightarrow{e_z}$;
- la réaction $\overrightarrow{R}$ orthogonale à la tige car il n'y a pas de frottement sur celle-ci ;
- la force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{f_{ie}} = m\,\omega^2\,r\,\sin\beta\,\overrightarrow{e_\perp}$, où $\overrightarrow{e_\perp}$ est défini sur le schéma ;
- et à la force de Coriolis $\overrightarrow{f_{ic}} = -2\,m\,\omega\,\dot{r}\,\sin\beta\,\overrightarrow{e_\otimes}$ où $\overrightarrow{e_\otimes}$ est défini sur le schéma.

Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à la masselotte et projeté sur (Or) conduit ainsi à

$$m\,\ddot{r} = -m\,g\,\cos\beta + m\,\omega^2\,r\,\sin^2\beta$$

À l'équilibre, $\ddot{r} = 0$ et ainsi

$$\boxed{r_{\text{eq}} = \frac{g\,\cos\beta}{\omega^2\,\sin^2\beta}}$$

2) Cette position d'équilibre résulte de la compensation des effets du poids vers le bas (vers les r décroissants) et de la force d'inertie d'entraînement vers le haut (vers les r croissants). Imaginons que l'on déplace la masselotte vers le haut ($\mathrm{d}r > 0$) à partir de sa position d'équilibre. La composante sur (Or) du poids ne change pas, c'est une force constante. Mais la force d'inertie d'entraînement augmente, et tend donc à emporter la masselotte encore plus vers le haut, en l'éloignant de sa position d'équilibre. Cette dernière est donc **instable**.

3) L'équation du mouvement est

$$\ddot{r} - \omega^2\,\sin^2\beta\,r = -g\,\cos\beta$$

dont la solution est

$$r(t) = A\,\mathrm{ch}\,\Omega\,t + B\,\mathrm{sh}\,\Omega\,t + r_{\text{eq}} \qquad \text{avec} \qquad \Omega = \omega\,\sin\beta$$

et les conditions initiales $r(0) = r_0$ et $\dot{r} = 0$ conduisent à

$$A + r_{\text{eq}} = r_0 \qquad \text{et} \qquad B = 0$$

d'où finalement

$$\boxed{r(t) = r_{\text{eq}} + \left(r_0 - r_{\text{eq}}\right)\mathrm{ch}\,\Omega\,t}$$

Remarque. Si $r_0 > r_{\text{eq}}$, $r(t)$ tend vers $+\infty$, la solution est divergente. À l'inverse si $r_0 < r_{\text{eq}}$, alors $r(t)$ tend vers $-\infty$, mais évidemment seuls les $r > 0$ ont un sens. La masselotte atteint dans ce cas l'origine de la tige au temps

$$t = \frac{1}{\Omega}\,\mathrm{argch}\left(\frac{r_{\text{eq}}}{r_{\text{eq}} - r_0}\right)$$

Une fois cette position atteinte, la masselotte y reste.