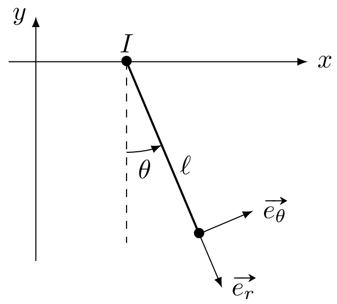
M2-TD

Correction

M2 — 10 Pendule excité sinusoïdalement



1) Il est **non galiléen** car en translation accélérée par rapport à $\mathcal{R}$.

2) Les forces sont la tension

$$\boxed{\vec{T} = -T\,\vec{e_r} \qquad \text{avec} \qquad T > 0}$$

le poids

$$\boxed{\vec{P} = m\,\vec{g} = m\,g\,\cos\theta\,\vec{e_r} - m\,g\,\sin\theta\,\vec{e_\theta}}$$

et la force d'inertie d'entrainement

$$\boxed{\vec{f} = -m\,\vec{a_e} = m\,x_0\,\omega^2\,\sin(\omega\,t)\,\vec{e_x} = m\,x_0\,\omega^2\,\sin(\omega\,t)\,(\cos\theta\,\vec{e_\theta} + \sin\theta\,\vec{e_r})}$$

3) On peut appliquer le TMC à la masselotte dans $\mathcal{R}'$ à condition de prendre en compte le moment de la force d'inertie. On calcule le moment cinétique dans $\mathcal{R}'$ par rapport au point I de la masse

$$\vec{L} = \ell\,\vec{e_r} \wedge m\,\ell\,\dot\theta\,\vec{e_\theta} = m\,\ell^2\,\dot\theta\,\vec{e_z}$$

Les seuls moments des forces non nuls sont ceux du poids et de la force d'inertie d'entraînement

$$\vec{\mathcal{M}}(\vec{P}) = -m\,g\,\ell\,\sin\theta\,\vec{e_z} \qquad \text{et} \qquad \vec{\mathcal{M}}(\vec{f}) = m\,\omega^2\,\ell\,x_0\,\sin(\omega\,t)\,\cos\theta\,\vec{e_z}$$

Le TMC s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}(\vec{f})$$

La projection sur $\vec{e_z}$ conduit à

$$m\,\ell^2\,\ddot\theta = -m\,g\,\ell\,\sin\theta + m\,\omega^2\,\ell\,x_0\,\sin(\omega\,t)\,\cos\theta$$

Pour des petits angles $\sin\theta \approx \theta$ et $\cos\theta \approx 1$ donc

$$\boxed{\ddot\theta + \omega_0^2\,\theta = a\,\omega^2\,\sin(\omega\,t)}$$

4) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre forcée par une excitation sinusoïdale. Les solutions homogènes sont de la forme

$$\theta_h(t) = A\,\cos(\omega_0\,t) + B\,\sin(\omega_0\,t)$$

Vu le forçage sinusoïdal à ω, on cherche la solution particulière sous la forme $\theta_p(t) = C\,\sin(\omega\,t)$. On trouve, en remettant $\theta_p(t)$ dans l'équation du mouvement,

$$C = \frac{a\,\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

La solution générale est donc de la forme

$$\theta(t) = A\,\cos(\omega_0\,t) + B\,\sin(\omega_0\,t) + \frac{a\,\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\,\sin(\omega\,t)$$

La condition initiale $\theta(0) = 0$ impose $A = 0$. L'autre condition initiale $\dot\theta(0) = 0$ impose après calculs

$$B = -\frac{a\,\omega^3}{\omega_0\,(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Finalement

$$\boxed{\theta(t) = \frac{a\,\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(\sin(\omega\,t) - \frac{\omega}{\omega_0}\,\sin(\omega_0\,t)\right)}$$

Remarque : Dans le cas où $\omega = \omega_0$, il y a un phénomène de résonance.