M2-TD

Correction

M2 — 07 Système thermodynamique fermé en rotation

1) On se place dans le référentiel en rotation à ω, non galiléen. La paroi est soumise à son poids $m\,\vec{g}$, à la réaction du tube $\vec{R}$, à la force d'inertie d'entraînement $m\,\omega^2\,x\,\vec{e_x}$, à la force de Coriolis qui est nulle à l'équilibre relatif, et aux forces de pression à gauche et à droite de la plaque. Le TCM s'écrit donc

$$m\,\vec{a} = m\,\vec{g} + \vec{R} + m\,\omega^2\,x\,\vec{e_x} + \vec{f_{\text{ie}}} + P_{\text{g}}\,S\,\vec{e_x} - P_{\text{d}}\,S\,\vec{e_x}$$

La projection sur $\vec{e_x}$ en situation d'équilibre conduit à ($\vec{R}$ n'est pas suivant $\vec{e_x}$ car il n'y a pas de frottements)

$$0 = m\,\omega^2\,x_{\text{eq}} + P_{\text{g}}\,S - P_{\text{d}}\,S$$

Il reste à déterminer les pressions P_{g} et P_{d}. En utilisant la loi des gaz parfaits, il vient

$$P_{\text{g}} = \frac{n\,R\,T}{S\,(a+x)} \qquad \text{et} \qquad P_{\text{d}} = \frac{n\,R\,T}{S\,(a-x)}$$

donc (en prenant en compte $n = 1$ mole)

$$0 = \frac{m\,\omega^2}{R\,T}\,x_{\text{eq}} + \frac{1}{a+x_{\text{eq}}} - \frac{1}{a-x_{\text{eq}}} = \frac{m\,\omega^2}{R\,T}\,x_{\text{eq}} - \frac{2\,x_{\text{eq}}}{a^2 - x_{\text{eq}}^2}$$

La solution $x_{\text{eq}} = 0$ est alors évidente. Il y a aussi deux autres solutions

$$x_{\text{eq}} = \pm\sqrt{a^2 - \frac{2\,R\,T}{m\,\omega^2}}$$

qui existent seulement si

$$\boxed{T < \frac{m\,\omega^2\,a^2}{2\,R} = T_c}$$

La solution $x_{\text{eq}} = 0$ est stable lorsqu'elle est la seule solution. Elle devient instable à l'apparition des deux autres, qui sont alors stables.

Remarque : Dur à interpréter en terme de température, mais on peut aussi écrire en terme de pulsation qu'il faut

$$\omega > \sqrt{\frac{2\,R\,T}{m\,a^2}}$$

pour avoir des solutions non nulles. L'interprétation est cette fois évidente, il faut que le dispositif tourne suffisamment vite pour que ces solutions existent, conformément à l'intuition.