M2-TD

Correction

M2 — 07 Mouvement sur un axe tournant 1

1) On considère comme système la masselotte de masse m. On choisit comme référentiel celui de la tige, en rotation uniforme ($\omega = \mathrm{Cste}$) autour de l'axe (Oz) fixe par rapport au référentiel du laboratoire supposé galiléen. Cette masselotte subit

— son poids $\overrightarrow{P} = -m\,g\,\overrightarrow{e_z}$;
— la réaction de la tige $\overrightarrow{R} = R_\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + R_z\,\overrightarrow{e_z}$ car il n'y a pas de frottements donc $R_r = 0$;
— la force de rappel du ressort $\overrightarrow{F} = -k\,(r - r_0)\,\overrightarrow{e_r}$;
— la force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{f_{ie}} = m\,\omega^2\,r\,\overrightarrow{e_r}$;
— la force de Coriolis $\overrightarrow{f_{ic}} = -2\,m\,\omega\,\dot{r}\,\overrightarrow{e_\theta}$.

Les positions d'équilibre ($\ddot{r} = 0$ et $\dot{r} = 0$) sont telles que toutes les forces s'y compensent. Sur l'axe (Or), cela conduit à

$$k\,(r_{\mathrm{eq}} - r_0) = m\,\omega^2\,r_{\mathrm{eq}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{r_{\mathrm{eq}} = \frac{r_0}{1 - m\,\omega^2\,/\,k}}$$

Il faut évidemment $r > 0$, si bien que **cette position d'équilibre n'existe que si** $\omega < \sqrt{k/m}$, c'est-à-dire si la tige ne tourne pas trop vite.

2) L'équation du mouvement est la projection sur l'axe (Or) du PFD dans le référentiel de la tige

$$m\,\ddot{r} = -k\,(r - r_0) + m\,\omega^2\,r$$

qu'on réécrit

$$\boxed{\ddot{r} + \left(\frac{k - m\,\omega^2}{m}\right) r = \frac{k}{m}\,r_0}$$

Il y a deux cas à considérer : si $\omega < \sqrt{k/m}$, alors

$$\ddot{r} + \Omega^2\,r = \frac{k}{m}\,r_0 \qquad \text{avec} \qquad \Omega = \sqrt{\frac{k - m\,\omega^2}{m}}$$

Les solutions sont donc

$$r(t) = A\cos\Omega\,t + B\sin\Omega\,t + \frac{k}{m\,\Omega^2}\,r_0$$

Si $r(0) = 2\,r_0$ et $\dot{r}(0) = 0$ alors $B = 0$ et $A = (2 - k\,/\,(m\,\Omega^2))\,r_0$ soit finalement

$$\boxed{r(t) = \left(\left(2 - \frac{k}{m\,\Omega^2}\right)\cos\Omega\,t + \frac{k}{m\,\Omega^2}\right) r_0}$$

La solution est **oscillante**, autour de la position d'équilibre. Deuxième cas, si $\omega > \sqrt{k/m}$, alors

$$\ddot{r} - \Omega^2\,r = \frac{k}{m}\,r_0 \qquad \text{avec} \qquad \Omega = \sqrt{\frac{m\,\omega^2 - k}{m}}$$

Les solutions sont cette fois

$$r(t) = A\,\mathrm{ch}\,\Omega\,t + B\,\mathrm{sh}\,\Omega\,t - \frac{k}{m\,\Omega^2}\,r_0$$

Si $r(0) = 2\,r_0$ et $\dot{r}(0) = 0$ alors $B = 0$ et $A = (2 + k\,/\,(m\,\Omega^2))\,r_0$ soit finalement

$$\boxed{r(t) = \left(\left(2 + \frac{k}{m\,\Omega^2}\right)\mathrm{ch}\,\Omega\,t - \frac{k}{m\,\Omega^2}\right) r_0}$$

Cette fois la solution est **divergente**, $r \to \infty$ pour $t \to \infty$: le ressort n'est pas assez raide pour contrer la force d'inertie d'entraînement, la masselotte s'éloigne de plus en plus vite du centre de rotation.

3) La projection du PFD dans le référentiel de la tige sur les directions $\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{e_z}$ selon lesquelles il n'y a pas de mouvement conduisent à

$$\boxed{R_\theta = 2\,m\,\omega\,\dot{r} \qquad \text{et} \qquad R_z = m\,g}$$