M1-TD

Correction

M1 — 20 Changement d'orbite - Ellipse de transfert

1) D'après la loi des aires, si la trajectoire est circulaire, elle est aussi uniforme, et par conséquent l'accélération s'écrit

$$\vec{a} = -\frac{v_0^2}{r_0}\,\vec{e_r}$$

où toutes les notations correspondent à un repérage cylindrique. Le principe fondamental de la dynamique appliqué dans le référentiel géocentrique au satellite soumis à l'attraction gravitationnelle de la Terre donne

$$m\,\vec{a} = -\frac{G\,M_T\,m}{r_0^2}\,\vec{e_r} \qquad \text{d'où} \qquad v_0 = \sqrt{\frac{G\,M_T}{r_0}}$$

Par ailleurs, l'accélération de la pesanteur correspond au champ gravitationnel de la Terre à la surface de celle-ci (si on admet que l'accélération d'entraînement axifuge est négligeable), et donc

$$\vec{g_0} = -\frac{G\,M_T}{r_0^2}\,\vec{e_r} \qquad \text{soit} \qquad g_0\,r_0 = \frac{G\,M_T}{r_0}$$

Par conséquent,

$$\boxed{v_0 = \sqrt{g_0\,r_0} = 7{,}9\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}}$$

Puis la période de révolution est

$$\boxed{T_0 = \frac{2\,\pi\,r_0}{v_0} = 2\,\pi\sqrt{\frac{r_0}{g_0}} = 5{,}1\times 10^3\ \mathrm{s}}$$

soit $T_0 = 1\text{h}24$. On nomme v_0 la **première vitesse cosmique**, ou encore vitesse d'orbite rasante, ou vitesse de première orbite.

2) En utilisant la troisième loi de Képler, on peut écrire

$$\frac{T_0^2}{r_0^3} = \frac{T_1^2}{r_1^3} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{r_1 = r_0\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{2/3} = 4{,}2\times 10^7\ \mathrm{km}}$$

puis

$$\boxed{v_1 = \frac{2\,\pi\,r_1}{T_1} = 3{,}1\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}}$$

3) L'énergie mécanique sur une trajectoire elliptique s'écrit

$$E_m = -\frac{G\,M_T\,m}{2\,a}$$

où $2\,a = r_0 + r_1$ est le double du demi grand axe de l'ellipse. Par ailleurs

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}\,m\,v^2 - \frac{G\,M_T\,m}{r}$$

Au périgée P, on a donc

$$-\frac{G\,M_T\,m}{r_0 + r_1} = \frac{1}{2}\,m\,{v_0'}^2 - \frac{G\,M_T\,m}{r_0} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{v_0' = \sqrt{\frac{2\,G\,M_T\,r_1}{r_0\,(r_0 + r_1)}} = \sqrt{\frac{2\,g_0\,r_0\,r_1}{r_0 + r_1}} = 10{,}4\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}}$$

et à l'apogée A, on calcule de manière identique

$$\boxed{v_1' = \sqrt{\frac{2\,g_0\,r_0^3}{r_1\,(r_0 + r_1)}} = 1{,}6\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}}$$

4) On utilise à nouveau la troisième loi de Képler

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_0^2}{r_0^3} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{T = T_0\left(\frac{a}{r_0}\right)^{3/2} = T_0\left(\frac{r_0 + r_1}{2\,r_0}\right)^{3/2} = 37{,}6\times 10^3\ \mathrm{s}}$$

soit $T = 10\text{h}28$. La durée t du transfert de P à A est **la moitié de cette période** soit $t = 5\text{h}14$.