M1-TD

Correction

M1 — 16 Matière noire

1) L'étoile E est soumise à l'attraction gravitationnelle du bulbe de la galaxie, de masse M. Dans le référentiel du bulbe supposé galiléen, le théorème du centre de masse appliqué à l'étoile s'écrit donc

$$m\,\vec{a} = m\,\vec{\mathcal{G}} \tag{1}$$

où $\vec{\mathcal{G}}$ est le champ gravitationnel créé par le bulbe au point E. Pour le calculer, on applique le théorème de Gauss gravitationnel. L'étude des symétries et des invariances de la distribution de masse du bulbe conduit à écrire

$$\vec{\mathcal{G}} = \mathcal{G}(r)\,\vec{e_r}$$

car le bulbe est à symétrie sphérique.

En considérant comme surface de Gauss $\mathcal{S}$ la sphère de rayon r de centre O (donc passant par l'étoile E), le théorème de Gauss s'écrit ($M_{\text{int}} = M$ car cette surface de Gauss entoure tout le bulbe)

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{\mathcal{G}} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -4\,\pi\,G\,M_{\text{int}} = -4\,\pi\,G\,M \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathcal{G}(r)\,4\,\pi\,r^2 = -4\,\pi\,G\,M \qquad \text{soit} \qquad \vec{\mathcal{G}}(r) = -G\,\frac{M}{r^2}\,\vec{e_r}$$

d'où l'on tire grâce à (1) l'accélération de l'étoile

$$\vec{a} = -G\,\frac{M}{r^2}\,\vec{e_r}$$

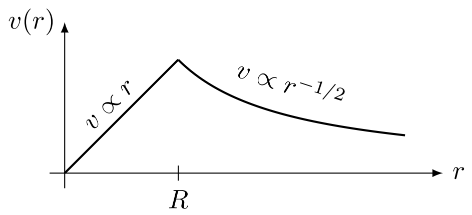
Par ailleurs, la trajectoire de l'étoile est supposée circulaire uniforme donc $\vec{a} = -(v^2\,/\,r)\,\vec{e_r}$. Par conséquent,

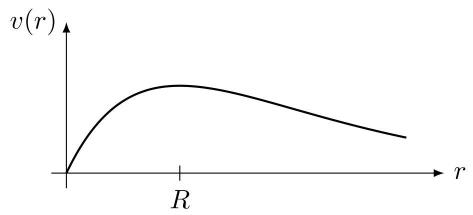
$$\boxed{v = \sqrt{\frac{G\,M}{r}} \propto r^{-1/2}}$$

2) Si l'étoile est dans le bulbe de la galaxie, on adopte le même raisonnement mais cette fois la surface de Gauss entoure une masse $\varrho\,4\,\pi\,r^3\,/\,3$ avec ϱ la masse volumique du bulbe d'où

$$\vec{\mathcal{G}} = -G\,\varrho\,\frac{4\,\pi\,r}{3}\,\vec{e_r} \qquad \text{et donc} \qquad \boxed{v = \sqrt{\frac{4\,\pi\,G\,\varrho}{3}}\,r \propto r}$$

3) On trace le résultat de nos calculs à gauche et ce qu'on attendrait qualitativement si la répartition des masses était plus continue à droite





4) Les ondes électromagnétiques sont décalées « vers le rouge », c'est-à-dire vers les basses fréquences, lorsque **la source s'éloigne de nous**.

5) Les résultats expérimentaux montrent visiblement que $v(r)$ tend vers une constante v_0 lorsque $r \to \infty$, alors que notre modèle de masse concentrée dans le bulbe donne $v(r) \to 0$ dans la même limite. En reprenant le théorème de Gauss avec une masse $M_n(r)$ entourée par la sphère de rayon $r > R$, on trouve d'abord

$$\vec{\mathcal{G}} = -G\,\frac{M_n(r)}{r^2}\,\vec{e_r}$$

donc une vitesse

$$v_0 = \sqrt{\frac{G\,M_n(r)}{r}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{M_n(r) = \frac{v_0^2\,r}{G}}$$

ainsi **il faut $M_n(r) \propto r$ pour avoir une vitesse constante** v_0. Notons qu'on a supposé ici que la masse entourée était seulement de la matière noire, ce qui revient à supposer par exemple qu'il y a beaucoup plus de matière noire que de matière classique $M_n(r) \gg M$.