M1-TD

Correction

M1 — 10 Oscillateur anharmonique

Cette question est indépendante des précédentes.

6) La conservation de l'énergie mécanique s'écrit

$$E_m = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + b\,x^4 = \mathrm{Cste} = b\,x_0^4$$

si l'oscillateur est laché sans vitesse initiale de la position $x = x_0$. En conséquence,

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{2\,b}{m}\left(x_0^4 - x^4\right)$$

Considérons une partie du mouvement, comprise entre le moment où $x = 0$ (la masse est au centre) et $x = x_0$ (la masse atteint sa position extrémale). Pendant ce moment, qui dure un quart de période, la vitesse est positive, donc

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = +\sqrt{\frac{2\,b}{m}\left(x_0^4 - x^4\right)}$$

On sépare les variables et on intègre sur la partie du mouvement qu'on considère

$$\int_0^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x_0^4 - x^4}} \;=\; \sqrt{\frac{2\,b}{m}} \int_0^{T/4} \mathrm{d}t \;=\; \sqrt{\frac{2\,b}{m}}\,\frac{T}{4}$$

Le changement de variable $u = x\,/\,x_0$ dans l'intégrale conduit à

$$\int_0^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x_0^4 - x^4}} = \frac{1}{x_0}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - u^4}}$$

Cette intégrale est un nombre quelconque, qu'on note I. L'énoncé précise que $I \approx 1{,}311$. En tout cas

$$T = \frac{4\,I}{x_0}\sqrt{\frac{m}{2\,b}} \propto \frac{1}{x_0}$$

Cette période **dépend de l'amplitude des oscillations**, ce qui n'est pas le cas pour des oscillations harmoniques, qu'on qualifie pour cette raison d'**isochrones**. Cette propriété d'ischronisme est en fait un cas très particulier, et peu d'oscillateurs en sont pourvus. L'isochronisme des oscillations harmoniques ne doit donc pas être vu comme une généralité, bien au contraire.

Ici, plus l'amplitude est grande, plus la période est petite. Les deux sont inversement proportionnelles.