M1-TD

Correction

M1 — 08 Satellites et frottements

1) L'énergie potentielle gravitationnelle du satellite de masse m, dans le champ gravitationnel de la Terre de masse M_T est

$$\boxed{E_{p0} = -G\,\frac{m\,M_T}{r_0}}$$

Par ailleurs, le principe fondamental de la dynamique appliqué au satellite assimilé à un point matériel donne

$$m\,\vec{a} = -G\,\frac{m\,M_T}{r_0^2}\,\vec{e_r}$$

et puisqu'on suppose la trajectoire circulaire uniforme, la projection sur l'axe $\vec{e_r}$ conduit à

$$-m\,\frac{v^2}{r_0} = -G\,\frac{m\,M_T}{r_0^2} \qquad \text{soit} \qquad v^2 = G\,\frac{M_T}{r_0}$$

L'énergie cinétique est alors

$$\boxed{E_{c0} = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = G\,\frac{m\,M_T}{2\,r_0}} \qquad \left(= -\frac{1}{2}\,E_{p0}\right)$$

Finalement l'énergie mécanique est

$$\boxed{E_{m0} = E_{c0} + E_{p0} = -G\,\frac{m\,M_T}{2\,r_0} < 0}$$

L'énergie mécanique est bien négative, comme attendu pour une **trajectoire liée**.

2) Si la trajectoire reste circulaire, alors on peut écrire comme précédemment

$$E_m = -G\,\frac{m\,M_T}{2\,r} \qquad \text{et} \qquad E_m = E_{m0}\,(1+\alpha\,t) = -G\,\frac{m\,M_T}{2\,r_0}\,(1+\alpha\,t)$$

On a ainsi

$$\boxed{r(t) = \frac{r_0}{1+\alpha\,t}}$$

puis, d'après le PFD que nous avions écrit précédemment,

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{r}} = \sqrt{\frac{G\,M_T\,(1+\alpha\,t)}{r_0}}}$$

qui augmente en fonction du temps.

3) Les frottements dissipent de l'énergie, si bien que l'énergie **mécanique** diminue. Cela n'est absolument pas contradictoire avec l'augmentation de la vitesse, donc de l'énergie **cinétique**. En effet, la chute du satellite se traduit par la diminution de son altitude, donc de son énergie **potentielle**, qui est plus forte que l'augmentation de l'énergie cinétique. En conséquence l'énergie mécanique diminue malgré l'augmentation de la vitesse.