L3-TD

Correction

M1 — 06 Particule chargée dans un champ magnétique

1) La particule est soumise à la partie magnétique de la force de Lorentz uniquement. Le PFD appliqué à celle-ci dans le référentiel du laboratoire conduit donc à

$$m\,\vec{a} = q\,\vec{v}\wedge\vec{B}$$

Les projections sur les trois axes cartésiens donnent respectivement

$$m\left|\begin{array}{l}\dot{v_x}\\ \dot{v_y}\\ \dot{v_z}\end{array}\right. = q\left|\begin{array}{l}v_x\\ v_y\\ v_z\end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l}0\\ 0\\ B_0\end{array}\right. = q\,B_0\left|\begin{array}{l}v_y\\ -v_x\\ 0\end{array}\right.$$

qu'on réécrit

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{v_x} = +\,\omega\,v_y\\ \dot{v_y} = -\,\omega\,v_x\\ \dot{v_z} = 0\end{array}\right. \qquad \text{avec} \qquad \omega = \frac{q\,B_0}{m}$$

Ce sont **les équations du mouvement de la particule**.

2) La troisième équation mène directement à $v_z = \text{Cste}$ par intégration. Or $v_z(0) = 0$ car la vitesse est initialement suivant $\vec{e_x}$. Donc $\text{Cste} = 0$ et $v_z = 0$: **le mouvement reste dans le plan** $(0xy)$.

3) On obtient avec le changement de variable proposé

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{X} = -\,\mathrm{i}\,\omega\,X\\ \dot{Y} = +\,\mathrm{i}\,\omega\,Y\end{array}\right.$$

qui se résolvent en

$$X(t) = X_0\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\omega\,t} \qquad \text{et} \qquad Y(t) = Y_0\,\mathrm{e}^{+\,\mathrm{i}\,\omega\,t}$$

or $v_x(0) = v_0$ et $v_y(0) = 0$, soit $X_0 = Y_0 = v_0$. Puis $v_x(t) = (X+Y)\,/\,2$ et $v_y(t) = (X-Y)\,/\,(2\,\mathrm{i})$. On a donc

$$v_x(t) = v_0\,\cos\omega\,t \qquad \text{et} \qquad v_y(t) = -v_0\,\sin\omega\,t$$

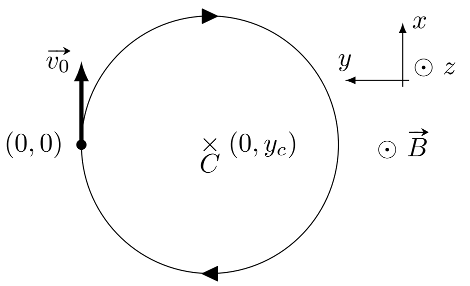
En intégrant encore une fois, et en choisissant l'origine du repère à la position initiale de la particule $x_0 = y_0 = 0$, on aboutit à

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega}\,\sin\omega\,t \qquad \text{et} \qquad y(t) = \frac{v_0}{\omega}\left(\cos\omega\,t - 1\right)}$$

4) En posant $y_c = -v_0\,/\,\omega$ on a

$$\boxed{x^2 + (y-y_c)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \qquad (1)$$

C'est l'équation cartésienne d'un cercle de centre $(0, -\,v_0\,/\,\omega)$ et de rayon $v_0\,/\,\omega$. La trajectoire est effectivement un cercle.



5) Le moment de la partie magnétique de la force de Lorentz par rapport au centre de la trajectoire circulaire est

$$\vec{\mathcal{M}} = \overrightarrow{CM}\wedge\left(q\,\vec{v}\wedge\vec{B}\right) = -q\,B_0\left(x\,v_x + (y-y_c)\,v_y\right)\vec{e_z}$$

Or, en dérivant (1) par rapport au temps, on obtient justement $x\,v_x + (y-y_c)\,v_y = 0$. *(C'est encore plus évident dans un repérage polaire : la force magnétique est selon $\vec{e_r}$ si la vitesse est selon $\vec{e_\theta}$.)* Puisque le moment de la seule force en jeu est nulle, le théorème du moment cinétique conclut que **le moment cinétique est conservé**.