

## Correction

## L2 – 01 Interféromètre et cavité de Fabry-Pérot

- 1) La relation traduit la **conservation de l'énergie** au niveau de chacune des deux lames.
- 2) L'onde traverse la première lame, se propage sur une distance  $e$ , puis traverse la deuxième lame. L'amplitude est donc

$$\underline{a}_1(e) = \underbrace{t}_{\text{trans.}} \times \underbrace{e^{j2\pi n e / \lambda_0}}_{\text{propa.}} \times \underbrace{t}_{\text{trans.}} \times \underbrace{a_i(0)}_{\text{onde ini.}} = t^2 e^{j2\pi n e / \lambda_0} \underline{a}_i(0)$$

La propagation sur une distance  $e$  se traduit effectivement par un déphasage  $2\pi n e / \lambda_0$ , ce dont on peut se souvenir de deux manières différentes : soit en écrivant que le déphasage est  $k e$ , avec  $k = 2\pi / \lambda = 2\pi n / \lambda_0$  le vecteur d'onde, soit en utilisant l'expression donnant le lien entre déphasage et différence de marche

$$\varphi(e) - \varphi(0) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta \quad \text{avec ici} \quad \delta = n e$$

- 3) Par théorème de superposition,

$$\underline{a}_{\text{tot}}(e) = \sum_{m=1}^{\infty} \underline{a}_m(e)$$

Il nous faut exprimer chacun des  $\underline{a}_m(e)$ . On connaît déjà  $\underline{a}_1(e)$ . Déterminons alors  $\underline{a}_2(e)$ , à partir de  $\underline{a}_i(0)$ . Le trajet de l'onde commence par la traversée de la première lame, puis elle se propage sur la distance  $e$ , elle se réfléchit sur la deuxième lame, se propage en sens inverse sur la même distance  $e$ , se réfléchit sur la première lame, se propage une troisième fois sur la distance  $e$ , puis enfin traverse la deuxième lame. On a donc

$$\begin{aligned} \underline{a}_2(e) &= t \times e^{j2\pi n e / \lambda_0} \times r \times e^{j2\pi n e / \lambda_0} \times r \times e^{j2\pi n e / \lambda_0} \times t \times \underline{a}_i(0) \\ &= t^2 r^2 e^{j6\pi n e / \lambda_0} \underline{a}_i(0) \end{aligned}$$

Le même raisonnement pour  $\underline{a}_3(e)$  conduit à  $\underline{a}_3(e) = t^2 r^4 e^{j10\pi n e / \lambda_0} \underline{a}_i(0)$ , puis on comprend la généralisation suivante

$$\underline{a}_m(e) = t^2 r^{2(m-1)} e^{j2(2m-1)\pi n e / \lambda_0} \underline{a}_i(0)$$

En conséquence, on calcule

$$\begin{aligned} \underline{a}_{\text{tot}}(e) &= \sum_{m=1}^{\infty} t^2 r^{2(m-1)} e^{j2(2m-1)\pi n e / \lambda_0} \underline{a}_i(0) \\ &= t^2 e^{j2\pi n e / \lambda_0} \underline{a}_i(0) \sum_{m=1}^{\infty} r^{2(m-1)} e^{j4(m-1)\pi n e / \lambda_0} \\ &= t^2 e^{j2\pi n e / \lambda_0} \underline{a}_i(0) \sum_{m=1}^{\infty} (r^2 e^{j\varphi})^{m-1} \\ &= t^2 e^{j2\pi n e / \lambda_0} \underline{a}_i(0) \frac{1}{1 - r^2 e^{j\varphi}} \end{aligned}$$

puisque l'on reconnaît la somme d'une série géométrique de raison  $r^2 e^{j\varphi}$ . Finalement, en utilisant les notations de l'énoncé,

$$\underline{a}_{\text{tot}}(e) = \frac{t^2 e^{j\varphi/2}}{1 - r^2 e^{j\varphi}} \underline{a}_i(0) = \frac{T e^{j\varphi/2}}{1 - R e^{j\varphi}} \underline{a}_i(0)$$

- 4) L'intensité est le module carré de l'amplitude complexe. On a ainsi

$$I_{\text{transmis}} = |\underline{a}_{\text{tot}}(e)|^2 = \underline{a}_{\text{tot}}(e) \underline{a}_{\text{tot}}(e)^* = \frac{T^2}{(1 - R e^{j\varphi})(1 - R e^{-j\varphi})} |\underline{a}_i(0)|^2$$

avec  $|\underline{a}_i(0)|^2 = I_{\text{incident}}$ . En poursuivant le calcul,

$$I_{\text{transmis}} = \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi} I_{\text{incident}}$$

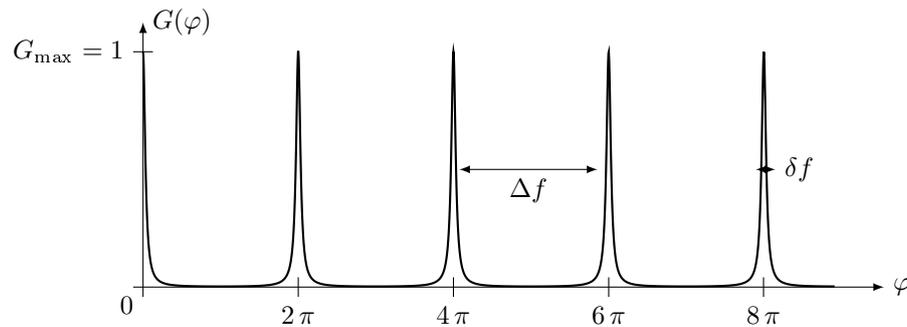
Pour obtenir l'expression de l'énoncé, on fait apparaître un carré parfait au dénominateur

$$I_{\text{transmis}} = \frac{T^2}{(1-R)^2 + 2R(1-\cos\varphi)} I_{\text{incident}}$$

puis on utilise que  $1-R=T$  et que  $1-\cos\varphi = 2\sin^2(\varphi/2)$  pour aboutir à

$$I_{\text{transmis}} = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} I_{\text{incident}} \quad \text{soit} \quad \boxed{G(\varphi) = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}}$$

5) On trace



$G$  atteint un maximum lorsque le sinus carré est minimal, c'est-à-dire pour  $\varphi/2 = k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . L'écart  $\Delta\varphi$  entre deux pics est donc  $2\pi$ , ce qu'il reste à traduire en terme de fréquence. On a déjà  $f = c/\lambda_0$ , donc  $\varphi = 4\pi n e f / c$  et alors

$$2\pi = \Delta\varphi = \frac{4\pi n e \Delta f}{c} \quad \text{soit} \quad \boxed{\Delta f = \frac{c}{2n e}}$$

**Remarque.** Remarquons que dans l'air,  $n \approx 1$  si bien que  $\Delta f = c/2e$ , ce qui est l'écart en fréquence entre deux modes propres consécutifs de vibration d'une corde de longueur  $e$  fixée à ses deux extrémités. Il y a une forte analogie « mécano-optique » entre la corde vibrante et la cavité Fabry-Pérot, déjà évoquée dans le cours.

Ensuite, la largeur à mi-hauteur du pic  $k$  s'obtient en écrivant que

$$G\left(f_k - \frac{\delta f}{2}\right) = G\left(f_k + \frac{\delta f}{2}\right) = \frac{G_{\text{max}}}{2} = \frac{1}{2}$$

$G$  étant périodique, on peut déterminer  $\delta f$  à partir de n'importe quel pic, et on choisit bien sûr le pic  $\varphi = 0$  par simplicité. Graphiquement, on observe que  $\delta f \ll \Delta f$  ce qui permet de faire un développement limité du sinus en 0

$$\frac{1}{2} = G\left(\frac{\delta f}{2}\right) = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\left(\frac{\pi n e \delta f}{c}\right)} \approx \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \left(\frac{\pi n e \delta f}{c}\right)^2}$$

On identifie ainsi

$$1 = \frac{4R}{(1-R)^2} \left(\frac{\pi n e \delta f}{c}\right)^2 \quad \text{soit} \quad \boxed{\delta f = \frac{(1-R)c}{2\pi n e \sqrt{R}}}$$

Finalement, la finesse de la cavité Fabry-Pérot est

$$\boxed{\mathcal{F} = \frac{\Delta f}{\delta f} = \frac{\pi \sqrt{R}}{1-R}}$$

**Remarque.** La finesse traduit le rapport entre la largeur spectrale d'un pic et la « distance spectrale » entre deux pics consécutifs. Pour  $R \approx 0,990$ , on a  $\mathcal{F} \approx 310$ ; et pour  $R \approx 0,998$ ,  $\mathcal{F} \approx 1570$ .

6) On a déjà une symétrie de révolution du dispositif donc la figure d'interférence est constituée d'anneaux effectivement. Ensuite, la lampe au sodium contient deux raies spectrales jaunes très proches mais différentes donc incohérentes. Avec un interféromètre de Michelson, les motifs d'interférences dus à chacune des deux raies se superposent grossièrement : on observe un unique système d'anneaux concentriques. Avec l'interféromètre de Fabry-Pérot, la finesse des pics est telle que les deux systèmes d'anneaux se distinguent clairement ! Cette finesse provient du fait que l'interféromètre de Fabry-Pérot réalise des interférences à une infinité d'ondes, tandis que celui de Michelson réalise des interférences à deux ondes seulement.