L1-TD

Correction

L1 — 05 Inversion de population pour un laser à quatre niveaux

1) En prenant en compte chacun des processus, on écrit les équations d'évolution suivantes pour les 4 populations

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{\mathrm{d}N_0}{\mathrm{d}t} & = & -W\,N_0+\gamma_{30}\,N_3+\gamma_{10}\,N_1\\ \dfrac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} & = & \gamma_{21}\,N_2-\gamma_{10}\,N_1\\ \dfrac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} & = & \gamma_{32}\,N_3-\gamma_{21}\,N_2\\ \dfrac{\mathrm{d}N_3}{\mathrm{d}t} & = & W\,N_0-\gamma_{32}\,N_3-\gamma_{30}\,N_3\end{array}\right.$$

et en régime permanent on obtient

$$\left\{\begin{array}{lcl}0 & = & -W\,N_0+\gamma_{30}\,N_3+\gamma_{10}\,N_1\\ 0 & = & \gamma_{21}\,N_2-\gamma_{10}\,N_1\\ 0 & = & \gamma_{32}\,N_3-\gamma_{21}\,N_2\\ 0 & = & W\,N_0-\gamma_{32}\,N_3-\gamma_{30}\,N_3\end{array}\right.$$

2) On remonte les équations une à une. La dernière donne

$$N_3=\frac{W}{\gamma_{32}+\gamma_{30}}\,N_0\approx\frac{W}{\gamma_{32}}\,N_0\qquad\text{car}\qquad\gamma_{32}\gg\gamma_{30}$$

puis l'avant dernière et la seconde permettent d'écrire successivement

$$N_2=\frac{\gamma_{32}}{\gamma_{21}}\,N_3\approx\frac{W}{\gamma_{21}}\,N_0\qquad\text{et}\qquad N_1=\frac{\gamma_{21}}{\gamma_{10}}\,N_1\approx\frac{W}{\gamma_{10}}\,N_0$$

On peut vérifier que la première équation est cohérente avec les calculs déjà faits

$$W\,N_0=\gamma_{30}\,N_3+\gamma_{10}\,N_1=\underbrace{\frac{\gamma_{30}}{\gamma_{32}}}_{\approx 0}\,W\,N_0+W\,N_0\approx W\,N_0\qquad\text{(okay !)}$$

3) Calculons pour commencer N_{tot}.

$$\begin{array}{lcl}N_{\text{tot}} & = & N_0+N_1+N_2+N_3\\ & = & \left(1+\dfrac{W}{\gamma_{10}}+\dfrac{W}{\gamma_{21}}+\dfrac{W}{\gamma_{32}}\right)N_0\\ & \approx & \left(1+\dfrac{W}{\gamma_{10}}+\dfrac{W}{\gamma_{21}}\right)N_0\qquad\text{car}\qquad\gamma_{32}\gg W\\ & = & \dfrac{\gamma_{10}\,\gamma_{21}+W\,(\gamma_{10}+\gamma_{21})}{\gamma_{10}\,\gamma_{21}}\,N_0\\ & \approx & \dfrac{\gamma_{21}+W}{\gamma_{21}}\,N_0\qquad\text{car}\qquad\gamma_{10}\gg\gamma_{21}\end{array}$$

puis l'inversion de population

$$N_2-N_1=\left(\frac{\gamma_{10}}{\gamma_{21}}-1\right)N_1=\left(\frac{\gamma_{10}-\gamma_{21}}{\gamma_{21}}\right)N_1\approx\frac{\gamma_{10}}{\gamma_{21}}\,N_1\qquad\text{car}\qquad\gamma_{10}\gg\gamma_{21}$$

On conclut alors

$$N_2-N_1=\frac{W}{\gamma_{21}}\,N_0=\frac{\gamma_{21}}{\gamma_{21}+W}\,N_{\text{tot}}\qquad\text{soit}\qquad\boxed{N_2-N_1=\frac{W}{\gamma_{21}+W}\,N_{\text{tot}}}$$

qui est positive quelque soit W. Il n'y a **pas de pompage minimal** contrairement au système à 3 niveaux.