L1-TD

Correction

L1 — 01 Relations entre les coefficients d'Einstein

1) La population d'atomes interagit avec la lumière par les trois mécanismes fondamentaux d'émission spontanée, d'absorption et d'émission stimulée. En se concentrant sur la population d'atomes dans le niveau 2, on peut écrire que la variation du nombre d'atomes dans ce niveau est

$$\mathrm{d}N_2 = \mathrm{d}N_2^{\text{spont}} + \mathrm{d}N_2^{\text{abs}} + \mathrm{d}N_2^{\text{stim}}$$

et en utilisant les lois d'évolutions on précise

$$\mathrm{d}N_2 = -A_{21}\,N_2\,\mathrm{d}t + B_{12}\,u(\nu_{12})\,N_1\,\mathrm{d}t - B_{21}\,u(\nu_{12})\,N_2\,\mathrm{d}t$$

On obtient finalement

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = -A_{21}\,N_2 + B_{12}\,u(\nu_{12})\,N_1 - B_{21}\,u(\nu_{12})\,N_2}$$

et puisque $N_{\text{tot}} = N_1 + N_2 = \text{Cste}$, on a en dérivant

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = A_{21}\,N_2 - B_{12}\,u(\nu_{12})\,N_1 + B_{21}\,u(\nu_{12})\,N_2$$

2) En régime permanent, on a

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = 0$$

d'où on tire directement la relation suivante entre N_1 et N_2

$$\boxed{\Big(B_{21}\,u(\nu_{12}) + A_{21}\Big)\,N_2 = B_{12}\,u(\nu_{12})\,N_1}$$

3) Isolons $u(\nu_{12})$ dans la relation précédente

$$u(\nu_{12}) = \frac{A_{21}\,N_2}{B_{12}\,N_1 - B_{21}\,N_2}$$

Puis, en divisant par $B_{21}\,N_2$ et en utilisant la loi de Boltzmann donnant le rapport $N_1\,/\,N_2$, on trouve

$$u(\nu_{12}) = \frac{A_{21}\,/\,B_{21}}{\dfrac{B_{12}}{B_{21}}\,\exp\left(\dfrac{E_2 - E_1}{k_B\,T}\right) - 1}$$

et on termine le calcul en précisant que

$$\nu_{12} = \frac{E_2 - E_1}{h}$$

donc

$$u(\nu_{12}) = \frac{A_{21}\,/\,B_{21}}{\dfrac{B_{12}}{B_{21}}\,\exp\left(\dfrac{h\,\nu_{12}}{k_B\,T}\right) - 1}$$

La loi de Planck permet ensuite de dire que

$$\frac{A_{21}\,/\,B_{21}}{\dfrac{B_{12}}{B_{21}}\,\exp\left(\dfrac{h\,\nu_{12}}{k_B\,T}\right) - 1} = u(\nu_{12}) = \frac{8\,\pi\,h\,\nu_{12}^3\,/\,c^3}{\exp\left(\dfrac{h\,\nu_{12}}{k_B\,T}\right) - 1}$$

Cette égalité étant vérifiée **quelque soit** T, cela impose

$$B_{12} = B_{21} \qquad \text{et} \qquad \frac{A_{21}}{B_{12}} = \frac{8\,\pi\,h\,\nu_{12}^3}{c^3}$$

On conclut finalement

$$\boxed{B_{12} = B_{21} \qquad \text{et} \qquad A_{21} = \frac{8\,\pi\,h\,\nu_{12}^3}{c^3}\,B_{12}}$$