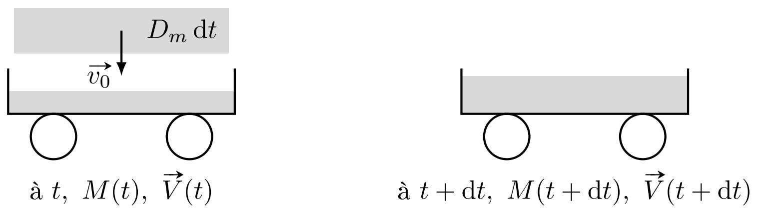
H4-TD

Correction

H4 — 07 Chariot sous la pluie

1) Débit D_m donc la masse du chariot est $M(t) = M_0 + D_m\,t$ (si vide au temps $t = 0$). On fait un bilan de quantité de mouvement sur le système fermé ci-dessous.



La variation de quantité de mouvement de ce système est

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{P} &= \vec{P}(t+\mathrm{d}t) - \vec{P}(t) \\
&= M(t+\mathrm{d}t)\,\vec{V}(t+\mathrm{d}t) - \left(M(t)\,\vec{V}(t) + D_m\,\vec{v_0}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \left(M(t) + D_m\,\mathrm{d}t\right)\vec{V}(t+\mathrm{d}t) - M(t)\,\vec{V}(t) - D_m\,\vec{v_0}\,\mathrm{d}t \\
&= M(t)\,\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + D_m\,\vec{V}(t+\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}t - D_m\,\vec{v_0}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Un développement limité du terme $\vec{V}(t+\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}t$ donne $\vec{V}(t)\,\mathrm{d}t + \dfrac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t^2 \approx \vec{V}(t)\,\mathrm{d}t$ au premier ordre en $\mathrm{d}t$. Donc

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = M(t)\,\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} + D_m\left(\vec{V}(t) - \vec{v_0}\right)$$

Ce système fermé est soumis uniquement à son poids et à la réaction du sol, dirigée selon la verticale car il n'y a pas de frottement. Le TCM appliqué dans le référentiel terrestre supposé galiléen s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = M(t)\,\vec{g} + \vec{R}$$

La projection sur l'horizontale conduit à ($\vec{v_0}$ est verticale et on note $\vec{V} = V\,\vec{e_x}$)

$$M(t)\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + D_m\,V = 0$$

soit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + \frac{D_m}{M_0 + D_m\,t}\,V = 0}$$

2) On sépare les variables

$$\frac{\mathrm{d}V}{V} = -\frac{D_m}{M_0}\,\frac{\mathrm{d}t}{1 + D_m\,t/M_0} \qquad \text{qui s'intègre en} \qquad \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = -\ln\left(1 + \frac{D_m\,t}{M_0}\right)$$

avec $V_0 = V(t=0)$. Finalement

$$\boxed{V(t) = \frac{V_0}{1 + t/\tau} \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{M_0}{D_m} \qquad \text{le temps caractéristique.}}$$

On trace cette vitesse. Avec ce modèle sans frottement, le chariot ralentit mais ne s'arrête jamais.