H4-TD

Correction

H4 — 03 Goutte de pluie

1) La goutte d'eau est supposée sphérique et l'eau qui la constitue a une masse volumique constante. On a donc

$$m(t) = \mu \, \frac{4}{3} \, \pi \, r^3(t) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 4 \, \mu \, \pi \, r^2(t) \, \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \mu \, a \, r_0 \, s(t)}$$

où on introduit la surface de la goutte $s(t) = 4 \, \pi \, r^2(t)$.

2) La goutte d'eau n'a pas une masse constante, elle ne constitue donc pas un système fermé et on ne peut pas lui appliquer le théorème du centre de masse sans précaution. On obtient l'équation de la trajectoire en réalisant un **bilan de quantité de mouvement**. On se place dans le référentiel terrestre.

Système à t **Système à** $t + \mathrm{d}t$

Le schéma précédent défini le système fermé :
- à t, il est constitué de la goutte et de la masse $\mathrm{d}m$ d'eau (au repos dans l'atmosphère) qui va intégrer la goutte entre t et $t + \mathrm{d}t$;
- à $t + \mathrm{d}t$, il est constitué de la goutte d'eau, de masse $m(t + \mathrm{d}t) = m(t) + \mathrm{d}m$.

La quantité de mouvement du système fermé à t est

$$\vec{p}(t) = m(t) \, \vec{v}(t) \quad \left(+ \, \mathrm{d}m \times \vec{0} \right)$$

et à $t + \mathrm{d}t$, elle vaut

$$\vec{p}(t + \mathrm{d}t) = m(t + \mathrm{d}t) \, \vec{v}(t + \mathrm{d}t)$$

La variation de la quantité de mouvement du système fermé est donc

$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{p}(t + \mathrm{d}t) - \vec{p}(t) = m(t + \mathrm{d}t) \, \vec{v}(t + \mathrm{d}t) - m(t) \, \vec{v}(t) = \mathrm{d}(m \, \vec{v})$$

Alors, le théorème du centre de masse appliqué à ce système fermé soumis seulement à son poids (on néglige tous les frottements) dans le référentiel terrestre supposé galiléen conduit à

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m(t) \, \vec{g}$$

Projettons cette équation sur l'axe (Oz) vertical ascendant (en prenant comme notation $\vec{v} = -v \, \vec{e_z}$, donc $v > 0$) pour obtenir l'équation du mouvement :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}(m \, v)}{\mathrm{d}t} = m \, g}$$

Attention ici, m dépend du temps donc ne peut pas sortir de la dérivée.

3) Puisqu'on connait explicitement $r(t)$, l'équation se résout par intégration directe :

$$\int_{m_0 \, v_0}^{m \, v} \mathrm{d}(m \, v) = g \int_0^t m(t) \, \mathrm{d}t$$

où m_0 et v_0 désignent la masse initiale et la vitesse initiale respectivement. Par conséquent,

$$m \, v - m_0 \, v_0 = \frac{4}{3} \, \pi \, \mu \, g \, r_0^3 \int_0^t (1 + a \, t)^3 \, \mathrm{d}t = \frac{4}{3} \, \pi \, \mu \, r_0^3 \left[\frac{(1 + a \, t)^4}{4 \, a} \right]_0^t$$

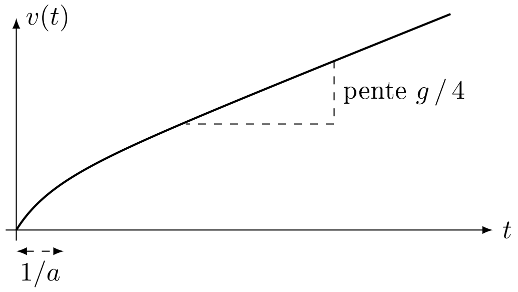
donc

$$m\,v = m_0\,v_0 + \frac{\pi\,\mu\,g\,r_0^3}{3\,a}\left((1+a\,t)^4 - 1\right)$$

et on conclut en divisant par m. Pour simplifier on prend $v_0 = 0$ en suivant l'énoncé.

$$v(t) = \frac{\pi\,\mu\,g\,r_0^3}{3\,a\,m(t)}\left((1+a\,t)^4 - 1\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{v(t) = g\,\frac{(1+a\,t)^4 - 1}{4\,a\,(1+a\,t)^3}}$$

On trace



De manière amusante, ou à défaut intéressante, on remarque qu'à temps long (c'est-à-dire $t \gg 1\,/\,a$)

$$v(t) \approx \frac{g\,t}{4}$$

Dans cette limite, tout se passe donc comme si la goutte était un système fermé évoluant dans un champ de pesanteur $g\,/\,4$ au lieu de g.