H3-TD

Correction

H3 — 07 Vidange

1) L'eau va s'écouler mais l'écoulement va finir par s'arrêter (comme pour une ampoule à décanter lorsqu'on a oublié d'enlever le bouchon). Pour l'air, le volume va augmenter donc la pression va diminuer (et c'est pour cette raison que l'écoulement va s'arrêter).

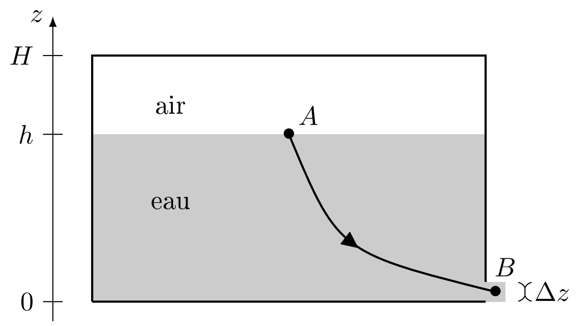
2) Si l'évolution est isotherme, alors $P\,V = \text{Cste}$. On a donc, en notant S la surface horizontale,

$$P(h)\,S\,(H-h) = P_0\,S\,(H-h_0) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{P(h) = P_0\,\frac{H-h_0}{H-h}}$$

3) La conservation du débit impose $V\,S = v\,s$, où $V = -\mathrm{d}h/\mathrm{d}t$ est la vitesse du fluide au niveau de la surface libre. Si $S \gg s$, on a $V \ll v$ et donc on peut supposer en première approximation $V \approx 0$. Dans ce cas, le niveau d'eau ne varie pas et le régime est stationnaire.

4) L'eau est un fluide parfait, homogène et incompressible d'après l'énoncé, et on a montré que le régime est stationnaire. On peut donc appliquer le théorème de Bernoulli restreint à une ligne de courant. Sur AB,

$$\frac{v_A^2}{2} + \frac{P_A}{\varrho} + g\,z_A = \frac{v_B^2}{2} + \frac{P_B}{\varrho} + g\,z_B$$



or $z_A = h$, $z_B = 0$, $v_A = V \approx 0$, $v_B = v$, $P_A = P(h)$ par continuité de la pression entre l'air et l'eau, et $P_B = P_0$ car le fluide est parfait et l'écoulement est unidirectionnel donc la pression évolue comme en statique dans les directions orthogonales à l'écoulement (on a $\varrho\,g\,\Delta z \approx 0$ car Δz est petit).

Finalement,

$$\frac{v^2}{2} = g\,h + \frac{P(h)-P_0}{\varrho} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{v = \sqrt{2\left(g\,h - \frac{P_0}{\varrho}\,\frac{h_0-h}{H-h}\right)}}$$

5) La conservation de la masse $V\,S = v\,s$ conduit à

$$\boxed{\dot{h} = -v\,\frac{s}{S}}$$

6) On a donc, en faisant l'hypothèse d'un régime **quasi-stationnaire**, c'est-à-dire en supposant que l'expression de v déterminée en régime stationnaire est encore valable en régime lentement variable,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{s}{S}\sqrt{2\left(g\,h - \frac{P_0}{\varrho}\,\frac{h_0-h}{H-h}\right)}}$$

7) L'équation est impossible à résoudre analytiquement, mais on peut facilement obtenir la hauteur d'équilibre en posant $\dot{h} = 0$. Alors

$$g\,h_{\mathrm{eq}} - \frac{P_0}{\varrho}\,\frac{h_0-h_{\mathrm{eq}}}{H-h_{\mathrm{eq}}} = 0$$

En multipliant par $\varrho\,(H-h_{\mathrm{eq}})$ on tombe sur un polynôme de degré 2 à résoudre. La solution positive est

$$\boxed{h_{\mathrm{eq}} = \frac{1}{2}\left(H + \frac{P_0}{\varrho\,g} + \sqrt{\left(H+\frac{P_0}{\varrho\,g}\right)^2 - 4\,\frac{P_0\,h_0}{\varrho\,g}}\right)}$$