H2-TD

Correction

H2 — 11 Chute à haut Reynolds

1) Pour l'air $\varrho \approx 1\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ et $\eta \approx 10^{-5}$ Pl. On propose ensuite comme distance typique $L \approx 1$ m (la taille du parachutiste en ordre de grandeur). On trouve

$$\mathcal{R}_e \approx 5 \times 10^6$$

Puisque $\mathcal{R}_e \gg 100$, le coefficient de trainée est constant et la force de trainée est proportionnelle à v^2.

2) On applique le théorème du centre de masse au parachutiste dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il est soumis à son poids et aux frottements fluides. On néglige la poussée d'Archimède devant le poids. Il s'écrit

$$m\,\vec{a} = m\,\vec{g} - \frac{1}{2}\mathcal{C}_x\,S\,\varrho\,|v|\,\vec{v}$$

En projetant sur l'axe (Oz) orienté vers le haut, et en notant $\vec{v} = v\,\vec{e_z}$ (donc $v < 0$), on obtient

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g + \alpha\,v^2 \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \frac{\mathcal{C}_x\,S\,\varrho}{2\,m}}$$

3) La vitesse limite est telle que $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$. On détermine

$$\boxed{v_{\mathrm{lim}} = -\sqrt{\frac{g}{\alpha}} \qquad \text{soit} \qquad |v_{\mathrm{lim}}| \approx 170\ \mathrm{km/h}}$$

si on propose $S = 1\ \mathrm{m^2}$ et $m = 70$ kg. La vitesse est négative car vers le bas. On trouve alors bien un Reynolds $\mathcal{R}_e \approx 5 \times 10^6$ qui est cohérent avec des frottements en v^2.

4) En séparant les variables

$$\frac{\mathrm{d}v}{1 - \dfrac{\alpha}{g}\,v^2} = -g\,\mathrm{d}t$$

Il reste à intégrer entre $t = 0$ $(v = 0)$ et t $(v = v(t))$:

$$\sqrt{\frac{g}{\alpha}}\,\mathrm{argth}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{g}}\,v\right) = -g\,t$$

soit

$$\boxed{v(t) = -\sqrt{\frac{g}{\alpha}}\,\mathrm{th}\left(\sqrt{\alpha\,g}\,t\right) = v_{\mathrm{lim}}\,\mathrm{th}\left(\frac{t}{\tau}\right) \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{1}{\sqrt{g\,\alpha}}}$$

La vitesse est négative car vers le bas. On trace