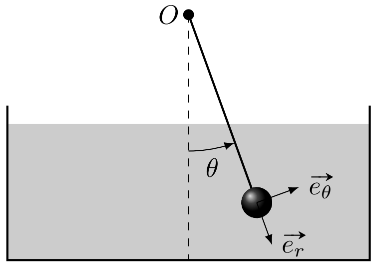
H2-TD

Correction

H2 — 10 Pendule dans un fluide visqueux



1) On applique le théorème du centre de masse à la sphère, soumise à son poids, à la tension de la corde et aux frottements fluides, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

$$m\,\vec{a} = m\,\vec{g} + \vec{T} - 6\,\pi\,\eta\,r\,\vec{v}$$

En utilisant la base polaire décrite sur le schéma ci-dessous, la projection sur $\vec{e_\theta}$ donne

$$m\,\ell\,\ddot{\theta} = -m\,g\,\sin\theta - 6\,\pi\,\eta\,r\,\ell\,\dot{\theta}$$

soit, sous forme canonique,

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{\theta} + \omega_0^2\,\sin\theta = 0 \qquad \text{avec} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad \text{et} \qquad Q = \frac{m\,\omega_0}{6\,\pi\,\eta\,r}}$$

2) Si les amplitudes sont petites $\theta \ll 1$ alors $\sin\theta \sim \theta$ donc

$$\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique amorti. Le discriminant du polynôme caractéristique est

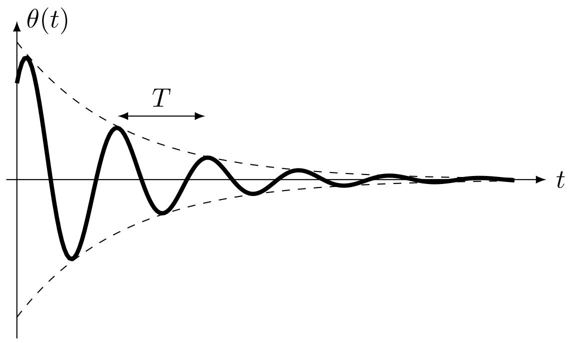
$$\Delta = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$$

Le régime est pseudo-périodique si $\Delta < 0$ (c'est-à-dire si $Q > 1/2$). Les racines sont alors

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2\,Q} \pm \mathrm{i}\,\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4\,Q^2}}$$

La pseudo-pulsation est donc

$$\boxed{\Omega = \omega_0\,\sqrt{1 - \frac{1}{4\,Q^2}}}$$



et les solutions prennent la forme

$$\theta(t) = \Big(A\,\cos(\Omega\,t) + B\,\sin(\Omega\,t)\Big)\,\exp\left(-\frac{\omega_0\,t}{2\,Q}\right)$$

où A et B sont à déterminer avec les conditions initiales $\theta(0)$ et $\dot{\theta}(0)$.

3) La pseudo-période $T = 2\,\pi\,/\,\Omega$ vaut

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4\,Q^2}}} \qquad \text{avec} \qquad T_0 = \frac{2\,\pi}{\omega_0}$$

et la viscosité s'obtient en exprimant le facteur de qualité Q

$$Q = \frac{T}{2\,\sqrt{T^2 - T_0^2}}$$

or $Q = \dfrac{2\,\pi\,m}{6\,\pi\,\eta\,r\,T_0}$ d'où

$$\eta = \frac{m}{3\,Q\,r\,T_0} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\eta = \frac{2\,m\,\sqrt{T^2 - T_0^2}}{3\,r\,T_0\,T}}$$