H2-TD

Correction

H2 — 09 Chute dans le champ de pesanteur terrestre

1) $\boxed{\mathcal{R}_e = \dfrac{\varrho\, D\, v}{\eta} \approx 2 \times 10^{-2}}$

2) $\vec{F} = -\dfrac{1}{2}\, \mathcal{C}_x\, \varrho\, S\, v\, \vec{v} = -12\, \dfrac{\varrho\, S\, v}{\mathcal{R}_e}\, \vec{v} = -12\, \dfrac{\eta\, \varrho\, S\, v}{\varrho\, D\, v}\, \vec{v}$ or S est la surface efficace de la bille, soit celle du disque maximal $S = \pi\, (D/2)^2$ qui conduit finalement, si on écrit $R = D/2$ le rayon de la sphère, à

$$\boxed{\vec{F} = -12\, \frac{\eta\, \pi\, D}{4}\, \vec{v} = -6\, \pi\, \eta\, R\, \vec{v}}$$

3) Le théorème du centre de masse appliqué à la bille dans le référentiel terrestre supposé galiléen s'écrit

$$m\, \vec{a} = m\, \vec{g} - \varrho\, \frac{4}{3}\, \pi\, R^3\, \vec{g} - 6\, \pi\, \eta\, R\, \vec{v}$$

En projetant sur l'axe (Oz) descendant, on obtient (en écrivant $\vec{v} = v\, \vec{e_z}$)

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g\, \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_f}\right) - \frac{6\, \pi\, \eta\, R}{m}\, v}$$

4) La vitesse limite $v_{\lim}$ est telle que $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$ soit $\boxed{v_{\lim} = \dfrac{m\, g\, (\varrho_f - \varrho)}{6\, \pi\, \eta\, R\, \varrho_f}.}$

et le temps typique s'identifie en mettant l'équation différentielle sous forme canonique

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_{\lim}}{\tau} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \boxed{\tau = \frac{m}{6\, \pi\, \eta\, R}}$$

Les applications numériques donnent, avec $m = \dfrac{4}{3}\, \pi\, R^3\, \varrho_f$, $\boxed{v_{\lim} = 1,5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} \qquad \text{et} \qquad \tau = 1,7 \text{ ms.}}$

La vitesse atteint 99 % de la vitesse limite en $5\, \tau \approx 10$ ms, soit quasiment instantanément. Par ailleurs, une vitesse si faible conduit effectivement à un petit nombre de Reynolds, ce qui est cohérent avec l'expression utilisée pour le coefficient de trainée.

5) Il suffit de mesurer la vitesse de la bille $v_{\lim}$ et de remonter à la viscosité par $\boxed{\eta = \dfrac{m\, g\, (\varrho_f - \varrho)}{6\, \pi\, v_{\lim}\, R\, \varrho_f}.}$

On peut le faire dans une éprouvette, en écrivant $v_{\lim} = d/t$ et en mesurant le temps t que met la bille pour tomber de $d = 20$ cm. On anticipe $t \approx 13$ s.

6) C'est une équation différentielle ordinaire linéaire du premier ordre à coefficients constants avec un second membre constant. Directement

$$v(t) = A\, \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + v_{\lim}$$

et A se détermine par la condition initiale $v(0) = 0$ soit $\boxed{v(t) = v_{\lim}\, \left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)}$

On trace