H2-TD

Correction

H2 — 05 Écoulement le long d'un plan incliné

1) La question est assassine. On avance méthodiquement. **Premier point**, la forme du champ de vitesse est précisée par l'énoncé : $\vec{v} = v(y)\,\overrightarrow{e_x}$. Il n'est donc pas nécessaire ici de réfléchir aux symétries et invariances de l'écoulement, tant mieux. **Deuxième point**, l'huile étant un fluide incompressible, l'écoulement l'est aussi forcément. On a donc $\operatorname{div}\vec{v} = 0$. Cela n'apporte ici aucune information, car avec la forme du champ de vitesse proposée, on trouve effectivement une divergence nulle sans condition sur $v(y)$. **Troisième point**, le fluide est newtonien et l'écoulement incompressible, donc il vérifie l'équation de Navier-Stokes

$$\varrho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}\right) = \eta\,\Delta\vec{v} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \varrho\,\vec{g}$$

Sachant, d'après l'énoncé, que $\vec{v} = v(y)\,\overrightarrow{e_x}$, on a

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \vec{0}, \qquad \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v} = \vec{0} \qquad \text{et} \qquad \Delta\vec{v} = \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}y^2}\,\overrightarrow{e_x}.$$

Les trois projections de l'équation de Navier-Stokes, sur les axes x, y et z, donnent alors

$$\begin{cases} 0 = \eta\,\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}y^2} - \dfrac{\partial P}{\partial x} + \varrho\,g\sin\alpha \\ 0 = -\dfrac{\partial P}{\partial y} - \varrho\,g\cos\alpha \\ 0 = -\dfrac{\partial P}{\partial z} \end{cases}$$

La dernière équation indique que la pression ne dépend pas de z (remarquons que même si l'énoncé ne le précise pas, on considère que la pression n'évolue pas dans le temps car c'est le cas pour la vitesse : l'écoulement est en fait étudié en **régime stationnaire**). La deuxième se réécrit

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\varrho\,g\cos\alpha \qquad \text{soit} \qquad P(x,y) = -\varrho\,g\,y\cos\alpha + f(x) \tag{1}$$

L'intégration est « partielle » par rapport à la variable y, si bien que la « constante d'intégration » n'est constante que vis-à-vis de la variable y, mais elle peut tout à fait dépendre de x, c'est pourquoi on note cette « constante » $f(x)$. La première équation peut alors être réécrite à ce stade

$$\underbrace{\eta\,\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}y^2}(y)}_{\text{ne dépend que de } y} = \underbrace{f'(x) - \varrho\,g\sin\alpha}_{\text{ne dépend que de } x} \tag{2}$$

où $f'(x)$ est la dérivée de $f(x)$. On a donc une égalité entre deux fonctions qui ne dépendent pas de la même variable : cela n'est possible que si ces fonctions sont en fait constantes, et on note cette constante A. Alors, on a déjà

$$f'(x) - \varrho\,g\sin\alpha = A \qquad \text{soit} \qquad f(x) = (A + \varrho\,g\sin\alpha)\,x + B$$

avec B une constante d'intégration. Donc, d'après l'équation (1),

$$P(x,\,y) = -\varrho\,g\,y\cos\alpha + (A + \varrho\,g\sin\alpha)\,x + B$$

et on a comme condition aux limites $P(x,\,e) = P_0$ car il y a **continuité de la pression** sur l'interface avec l'air de pression P_0 en $y = e$. Par conséquent

$$-\varrho\,g\,e\cos\alpha + (A + \varrho\,g\sin\alpha)\,x + B = P_0 \qquad \text{quelque soit } x.$$

On déduit donc (d'abord en posant $x = 0$, puis pour x non nul)

$$B = P_0 + \varrho\,g\,e\cos\alpha \qquad \text{et} \qquad A = -\varrho\,g\sin\alpha$$

Finalement le champ de pression est

$$\boxed{P(x,y) = P_0 + \varrho\, g\,(e-y)\cos\alpha}$$

Par ailleurs, l'équation (2) donne aussi

$$\eta\,\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}y^2} = A = -\varrho\, g \sin\alpha$$

Deux intégrations successives conduisent à

$$v(y) = -\frac{\varrho\, g\sin\alpha}{2\,\eta}\,y^2 + C\,y + D$$

avec C et D les deux constantes d'intégration. Les deux conditions aux limites sont

$$v(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}(e) = 0$$

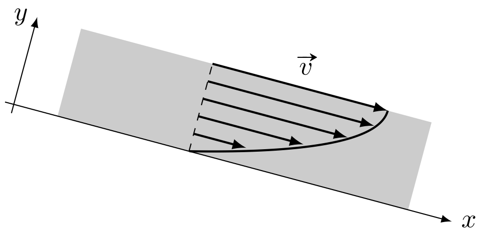
La première traduit la **continuité de la vitesse pour un fluide visqueux** au niveau du plan incliné, et la deuxième est donnée par l'énoncé. On déduit

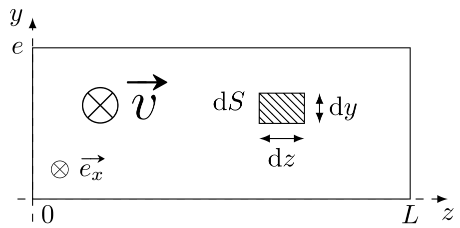
$$D = 0 \qquad \text{et} \qquad C = \frac{\varrho\, g\,\sin\alpha}{\eta}\,e$$

et on conclut alors enfin la première question

$$\boxed{v(y) = \frac{\varrho\, g\sin\alpha}{\eta}\left(e - \frac{y}{2}\right)y}$$

On trace le champ de vitesse ci-dessous à gauche.





2) Le débit massique est le flux de la densité surfacique de courant $\varrho\,\vec{v}$ à travers la surface considérée. Faisons un schéma de la surface d'intégration (voir ci-dessus à droite). Sur ce schéma le fluide « rentre dans la feuille ». La surface d'intégration est de largeur L dans la direction z et de hauteur e dans la direction y. On a $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\vec{e_x}$. On calcule

$$D_m = \iint_S \varrho\,\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \varrho\int_0^L \mathrm{d}z\int_0^e \mathrm{d}y\,v(y) = \frac{\varrho^2\,g\,L\sin\alpha}{\eta}\int_0^e \mathrm{d}y\left(e-\frac{y}{2}\right)y \qquad \text{soit} \qquad \boxed{D_m = \frac{\varrho^2\,g\,L\,e^3\sin\alpha}{3\,\eta}}$$

3) La vitesse maximale est atteinte en $y = e$. Elle vaut donc

$$\boxed{v_{\max} = \frac{\varrho\, g\, e^2\sin\alpha}{2\,\eta} = 3{,}1\,\mathrm{mm}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$$

L'ordre de grandeur semble pertinent pour un écoulement d'huile. Le Reynolds est évalué à partir de cette vitesse maximale, avec e pour distance typique, comme

$$\boxed{\mathcal{R}_\mathrm{e} = \frac{\varrho\, e\, v_{\max}}{\eta} \approx 3\times 10^{-3}}$$

Le Reynolds étant très inférieur à 2000, on conclut que l'**écoulement est laminaire** (et heureusement, car l'hypothèse initiale sur la forme de la vitesse $\vec{v} = v(y)\,\vec{e_x}$ ne tiendrait pas si l'écoulement était turbulent !).

4) Pour de l'eau, $\eta_e = 10^{-3}$ Pl et $\varrho_e = 10^3\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$. La vitesse maximale puis le Reynolds seraient alors

$$\boxed{v_{\max}^{\mathrm{eau}} = \frac{\varrho_e\, g\, e^2\sin\alpha}{2\,\eta_e} = 3{,}5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\mathcal{R}_\mathrm{e}^{\mathrm{eau}} = \frac{\varrho_e\, e\, v_{\max}^{\mathrm{eau}}}{\eta_e} \approx 3500}$$

Cette fois le Reynolds est supérieur (pas de beaucoup cependant...) à 2000, donc l'**écoulement ne pourrait pas être considéré laminaire**, et l'étude que nous avons menée n'est pas valable pour l'eau.