H1-TD

Correction

H1 — 02 Champ de vitesse dans un dièdre

1) Une **ligne de courant** est une ligne en tout point tangente au champ de vitesse.

Remarque 1. La détermination de leurs expressions mathématiques est hors-programme. Faisons-le néanmoins pour la gloire. On considère un élément infinitésimal de la ligne de courant $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$. Celui-ci est tangent au champ de vitesse donc son produit vectoriel ave la champ de vitesse est nul

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \wedge \vec{v} = \vec{0} \qquad \text{soit} \qquad \begin{vmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

d'où

$$-v_y\,\mathrm{d}z = 0, \qquad v_x\,\mathrm{d}z = 0 \qquad \text{et} \qquad v_y\,\mathrm{d}x - v_x\,\mathrm{d}y = 0$$

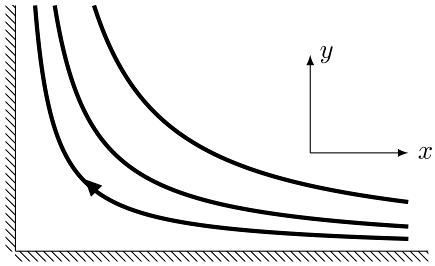
Directement $\mathrm{d}z = 0$: les lignes de courant sont planes, comprises dans les plans (x, y). Ensuite, on a ici $v_x = -k\,x$ et $v_y = k\,y$. Par conséquent

$$k\,y\,\mathrm{d}x = -k\,x\,\mathrm{d}y \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

qui s'intègre en

$$\ln x = -\ln y + \mathrm{Cste} \qquad \text{d'où} \qquad x\,y = \mathrm{e}^{\mathrm{Cste}} \qquad \text{et donc} \qquad y = \frac{\mathrm{Cste}'}{x}$$

avec $\mathrm{Cste}' = \mathrm{e}^{\mathrm{Cste}}$. Les lignes de courant sont donc bien des hyperboles. On dessine



2) L'accélération est la dérivée particulaire de la vitesse. On peut la calculer directement

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v} = \begin{vmatrix} v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial v_x}{\partial z} \\ v_x \dfrac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial v_y}{\partial z} \\ v_x \dfrac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k^2\,x + 0 + 0 \\ 0 + k^2\,y + 0 \\ 0 + 0 + 0 \end{vmatrix} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\vec{a} = k^2\left(x\,\vec{e_x} + y\,\vec{e_y}\right)}$$

(le terme local instationnaire est nul car le champ de vitesse ne dépend pas du temps). On peut aussi utiliser la **décomposition de Lamb**. Pour cette deuxième méthode on calcule d'abord v^2 puis son demi gradient

$$v^2 = k^2(x^2 + y^2) \qquad \text{puis} \qquad \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,v^2 = \begin{vmatrix} k^2\,x \\ k^2\,y \\ 0 \end{vmatrix}$$

On calcule ensuite le rotationnel du champ de vitesse

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -k\,x \\ k\,y \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}}$$

Alors finalement

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,v^2 + \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} \wedge \vec{v} = k^2\left(x\,\vec{e_x} + y\,\vec{e_y}\right)}$$

On retrouve bien le même résultat.

3) Calculons la divergence du champ de vitesse

$$\boxed{\text{div}\,\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = -k + k + 0 = 0}$$

4) Nous pouvons conclure que l'écoulement est **incompressible** ($\text{div}\,\vec{v} = 0$) et **irrotationnel** ($\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$).

5) L'écoulement étant irrotationnel, le champ de vitesse dérive d'un potentiel φ, c'est-à-dire qu'il existe un champ scalaire φ tel que

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$$

Remarque 2. Le potentiel

$$\varphi = \frac{k}{2}\left(-x^2 + y^2\right)$$

convient ici. Notons que comme tous les potentiels en physique (en électrocinétique avec le potentiel électrostatique V, en mécanique avec les énergies potentielles E_p...), ce qui a un sens physique dans φ est sa dérivée (plus précisement, son gradient : c'est le champ de vitese $\vec{v}$!). Il est donc **défini à une constante près** (car lui ajouter une constante ne change rien : celle-ci disparaît lorsqu'on prend la dérivée pour remonter au champ de vitesse).

Une **ligne équipotentielle** est une ligne sur laquelle le potentiel des vitesses est constant. Son équation mathématique est donc obtenue en la disant orthogonale au gradient (le gradient donnant pour rappel la direction de plus grande variation).

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi \cdot \overrightarrow{\text{d}\ell} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{d}\ell} = 0$$

Remarque 3. Il est hors-programme de savoir déterminer les lignes équipotentielles. Faisons-le malgré tout.

$$\overrightarrow{\text{d}\ell} \cdot \vec{v} = 0 \qquad \text{s'écrit} \qquad -k\,x\,\text{d}x + k\,y\,\text{d}y = 0 \qquad \text{soit} \qquad x\,\text{d}x = y\,\text{d}y$$

qui s'intègre en

$$x^2 = y^2 + \text{Cste}$$

(on a mis les facteurs 2 dans la constante). Il s'agit à nouveau d'hyperboles $y^2 - x^2 = \text{Cste}$. On trace en pointillés