H0-TD

Correction

H0 — 06 Oscillations d'un ballon

1) Le ballon est soumis à son poids et à la poussée d'Archimède. Le TCM s'écrit

$$m\,\overrightarrow{a_C} = m\,\vec{g} - \varrho(z_C)\,V\,\vec{g}$$

La projection sur l'axe z ascendant donne

$$\ddot{z_C} = -g + \varrho(z_C)\,V\,g\,/\,m$$

L'air est considérée être un GP donc $\varrho = \dfrac{P_0\,M_{\text{air}}}{R\,T}$ d'où

$$\ddot{z_C} = -g + \frac{P_0\,M_{\text{air}}\,V\,g}{m\,R\,T(z_C)}$$

Et par un développement limité à l'ordre un en $\varepsilon = z_C - z_0$, $T(z_C) = T_0 + a\,\varepsilon$ donc

$$\ddot{z_C} = -g + \frac{P_0\,M_{\text{air}}\,V\,g}{m\,R\,(T_0 + a\,\varepsilon)} \approx -g + \frac{P\,M_{\text{air}}\,V\,g}{m\,R\,T_0}\left(1 - \frac{a}{T_0}\,\varepsilon\right)$$

Et z_0 est la position d'équilbre, donc poids et poussée d'Archimède s'y compensent, ainsi $m = \dfrac{P_0\,M_{\text{air}}\,V}{R\,T_0}$. Alors

$$\boxed{\ddot{\varepsilon} + \omega^2\,\varepsilon = 0 \qquad \text{avec} \qquad \omega = \sqrt{\frac{g\,a}{T_0}}}$$

La période est $\tau = 2\,\pi/\omega \approx 34$ s.

2) On a un GP donc $\varrho = \dfrac{P\,M_{\text{air}}}{R\,T}$. Par conséquent

$$\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}z}(z_0) = \frac{M_{\text{air}}}{R\,T_0}\,\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}(z_0) - \frac{P_0\,M_{\text{air}}}{R\,T_0^2}\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}(z_0)$$

En écrivant $\varrho(z_C) = \varrho(z_0) + \varepsilon\,\dfrac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}z}(z_0)$, l'équation du mouvement devient

$$\begin{aligned}
\ddot{z_C} &= -g + \left(\varrho(z_0) + \varepsilon\,\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}z}(z_0)\right)\,\frac{V\,g}{m} \\
&= \varepsilon\,\frac{V\,g}{m}\left(\frac{M_{\text{air}}}{R\,T_0}\,\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}(z_0) - \frac{P_0\,M_{\text{air}}}{R\,T_0^2}\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}(z_0)\right) \\
&= \varepsilon\,g\left(\frac{1}{P_0}\,\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}(z_0) - \frac{1}{T_0}\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}(z_0)\right)
\end{aligned}$$

Et l'équation de la statique des fluides donne $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}(z_0) = -\varrho(z_0)\,g$ donc

$$\ddot{z_C} = \varepsilon\,g\left(-\frac{\varrho(z_0)\,g}{P_0} - \frac{a}{T_0}\right) = -\frac{\varepsilon\,g}{T_0}\left(\frac{M_{\text{air}}\,g}{R} + a\right) \qquad \text{soit} \qquad \ddot{\varepsilon} + \frac{g}{T_0}\left(\frac{M_{\text{air}}\,g}{R} + a\right)\varepsilon = 0$$

La nouvelle pulsation est

$$\boxed{\omega' = \sqrt{\frac{g\,a}{T_0} + \frac{M_{\text{air}}\,g^2}{R\,T_0}}}$$