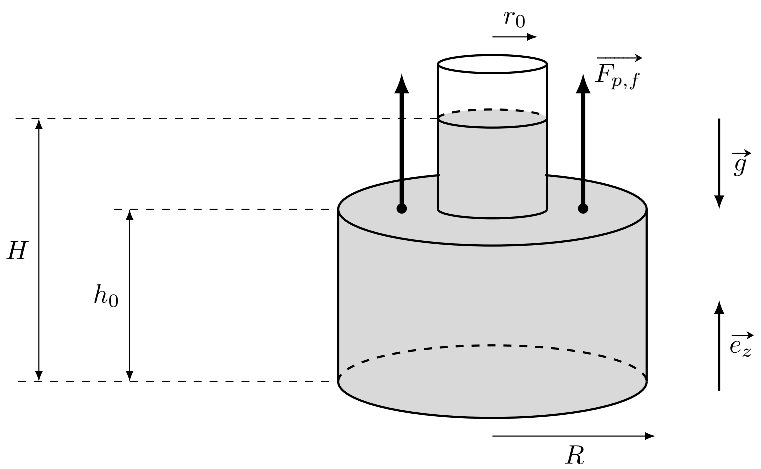
H0-TD

Correction

H0 — 03 Entonnoir (Résolution de problème)

1) On commence par un schéma où on représente les forces de pression verticales du fluide sur l'entonnoir.



(Il y a bien sûr des forces de pression sur les parois latérales, mais elles s'appliquent dans des directions horizontales, donc orthogonalement au poids : elles n'entreront pas en jeu dans le raisonnement.). La force de pression représentée sur le schéma pousse l'entonnoir vers le haut. Lorsque cette force de pression est suffisamment forte, l'entonnoir **décolle de la table**.

On adopte le raisonnement suivant : l'entonnoir de masse M dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen est soumis à son poids $\vec{P} = M\,\vec{g}$, aux forces de pression du fluide intérieur $\overrightarrow{F_{P,f}}$ **et de l'air extérieur** $\overrightarrow{F_{P,a}}$, et à la réaction de la table qui le supporte $\vec{N} = N\,\vec{e_z}$. L'entonnoir étant à l'équilibre, son accélération est nulle donc le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$\vec{P} + \overrightarrow{F_{P,a}} + \overrightarrow{F_{P,f}} + \vec{N} = \vec{0}$$

On projette cette équation sur l'axe z vertical orienté ascendant

$$-M\,g + F_{P,f,z} + F_{P,a,z} + N = 0 \tag{1}$$

Il reste à déterminer les composantes verticales des forces de pression $F_{P,a,z}$ et $F_{P,f,z}$. La pression de l'air étant homogène égale à P_0, la force de pression de l'air sur la paroi horizontale de surface $S = \pi\,(R^2 - r_0^2)$ s'écrit

$$F_{P,a,z} = -P_0\,\pi\,(R^2 - r_0^2)$$

Ensuite, on modélise le fluide comme une **phase incompressible indilatable** donc sa pression au niveau de cette même surface est $P = P_0 + \varrho\,g\,(H - h_0)$, où ϱ est la masse volumique du fluide. Alors la force de pression du fluide est

$$F_{P,f,z} = +\Big(P_0 + \varrho\,g\,(H - h_0)\Big)\,\pi\,(R^2 - r_0^2)$$

L'équation (1) permet d'aboutir à l'expression de N

$$N = g\,\Big(M - \varrho\,(H - h_0)\,\pi\,(R^2 - r_0^2)\Big)$$

Et l'entonnoir décolle si N **devient négatif**, c'est-à-dire si

$$\boxed{H > \frac{M}{\varrho\,\pi\,(R^2 - r_0^2)} + h_0}$$

Proposons une application numérique avec $R = 3$ cm, $r_0 = 0{,}5$ cm, $\varrho = 1{,}0 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ (eau), $M = 200$ g et $h_0 = 4$ cm. On trouve

$$H = 11\ \mathrm{cm}$$

Remarque. Il nous a fallu introduire beaucoup de grandeurs pour aboutir à un résultat : R, r_0, h_0, P_0, ϱ, et M. C'est typique dans une résolution de problème.