EM7-TD

Correction

EM7 — 17 Champ $\vec{B}$ dans un câble coaxial

1) On commence par calculer les densités de courants.

$$\vec{j_a} = \frac{i}{\pi R_1^2}\,\vec{u_z} \quad \text{dans l'âme, et} \quad \vec{j_g} = \frac{-i}{\pi(R_3^2 - R_2^2)}\,\vec{u_z} \quad \text{dans la gaine.}$$

Le plan $(M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$ est un plan de symétrie des courants donc d'antisymétrie de $\vec{B}$, donc $\vec{B}(r,\theta,z) = B(r,\theta,z)\,\vec{u_\theta}$. Il y a de plus invariance par rotation autour de $\vec{u_z}$ et par translation suivant $\vec{u_z}$ donc $\vec{B} = B(r)\,\vec{u_\theta}$. La circulation du champ $\vec{B}$ le long d'un cercle $\mathcal{C}$ de rayon r centré sur l'axe (Oz) vaut alors

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = 2\,\pi\,r\,B(r)$$

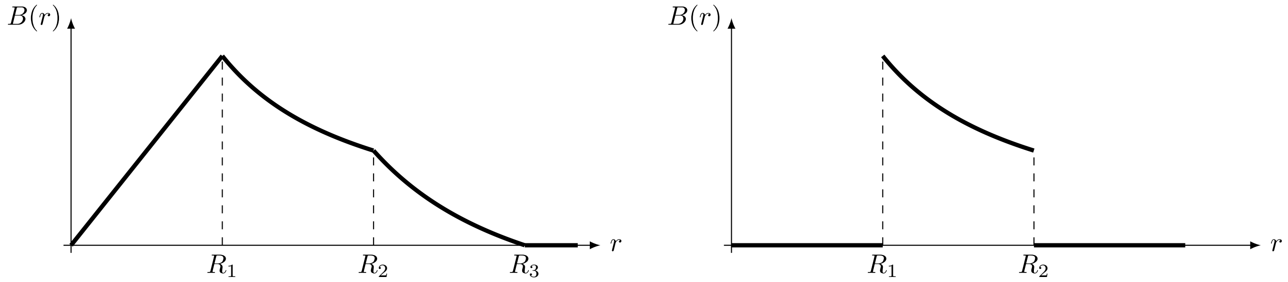
D'après le théorème d'Ampère, cette circulation est égale à $\mu_0\,I_{\text{enlacée}}$. On distingue plusieurs cas

$$\begin{array}{ll}
\text{pour } r < R_1 & I_{\text{enlacée}} = j_a \times \pi\,r^2 \\
\text{pour } R_1 < r < R_2 & I_{\text{enlacée}} = +i \\
\text{pour } R_2 < r < R_3 & I_{\text{enlacée}} = i + j_g \times \pi\,(r^2 - R_2^2) \\
\text{pour } r > R_3 & I_{\text{enlacée}} = +i - i = 0
\end{array}$$

et pour chaque cas $\vec{B} = \dfrac{\mu_0\,I_{\text{enlacée}}}{2\,\pi\,r}\,\vec{u_\theta}$, soit

$$\begin{array}{ll}
\text{pour } r < R_1 & \vec{B} = \dfrac{\mu_0\,i\,r}{2\,\pi\,R_1^2}\,\vec{u_\theta} \\[2ex]
\text{pour } R_1 < r < R_2 & \vec{B} = \dfrac{\mu_0\,i}{2\,\pi\,r}\,\vec{u_\theta} \\[2ex]
\text{pour } R_2 < r < R_3 & \vec{B} = \dfrac{\mu_0\,i}{2\,\pi\,r}\left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)\vec{u_\theta} \\[2ex]
\text{pour } r > R_3 & \vec{B} = \vec{0}
\end{array}$$

On trace alors la figure de gauche.



2) Il n'y a plus de courant pour $r < R_1$ donc plus de champ. On trace la figure de droite. Le champ $\vec{B}$ est maintenant discontinu. C'est normal en présence de courants surfaciques.

3) La densité volumique est $u_m = B^2/(2\,\mu_0)$. D'après la question précédente, $\vec{B}$ est non nul seulement entre R_1 et R_2. Il suffit donc d'intégrer entre ces deux rayons. On considère une portion ℓ de câble. Alors

$$U_m = \iiint_{\mathcal{V}} u_m\,\mathrm{d}V = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{B^2}{2\,\mu_0}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\,\mu_0}\left(\int_0^{\ell}\mathrm{d}z\right)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_{R_1}^{R_2} B^2(r)\,r\,\mathrm{d}r\right)$$

Entre R_1 et R_2, $B(r) = \mu_0\,i/(2\,\pi\,r)$. On aboutit finalement à

$$\boxed{U_m = \frac{\mu_0\,i^2\,\ell}{4\,\pi}\,\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

4) $U_m = L\,i^2/2$. Pour une portion de longueur ℓ, $U_m = \Lambda\,\ell\,i^2/2$ avec Λ l'inductance linéïque. On identifie

$$\boxed{\Lambda = \frac{\mu_0}{2\,\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

L'application numérique donne $\Lambda = 1{,}4 \times 10^{-7}$ $\mathrm{H \cdot m^{-1}}$ et pour $\ell = 1$ m on a $L = \Lambda\,\ell = 1{,}4 \times 10^{-7}$ H.