EM7-TD

Correction

EM7 — 10 Décharge d'une sphère

1) L'air est conducteur donc des charges vont se disperser dans l'air. La boule (de rayon R) crée un champ électrique car elle est chargée. À l'extérieur, tout se passe comme si la totalité de la charge était concentrée au point O (résultat du théorème de Gauss).

$$\vec{E}(r,t) = \frac{q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{e_r} \qquad \text{pour } r > R$$

L'air a une conductivité γ donc la densité de courant de charge qui quitte la boule est $\vec{\jmath}(r,t) = \dfrac{\gamma\, q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{e_r}$.

Ensuite la variation de charge est égale à l'opposé du flux sortant à travers la surface $\mathcal{S}$ de la boule (car q diminue donc $\mathrm{d}q < 0$)

$$\mathrm{d}q(t) = -\left(\oiint_{\mathcal{S}} \vec{\jmath}\cdot\vec{\mathrm{d}S}\right)\mathrm{d}t = -\frac{\gamma\, q(t)}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \times 4\pi R^2 \times \mathrm{d}t = -\frac{\gamma\, q(t)\,\mathrm{d}t}{\varepsilon_0}$$

d'où $$\boxed{\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\frac{\gamma}{\varepsilon_0}\,q \qquad \text{qui s'intègre en} \qquad q(t) = q\,\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}}$$

2) Au bout de $5\,\tau$, on peut considérer que la boule est déchargée. On trouve 2h30 environ.

Remarque : On suppose l'ARQS. Les plans $(M, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ et $(M, \vec{e_r}, \vec{e_\varphi})$ sont des plans de symétrie de $\vec{\jmath}$ donc d'antisymétrie de $\vec{B}$. $\vec{B}$ est donc orthogonal à ces deux plans : il est nul.

3) La puissance dissipée (en utilisant que l'élément de volume infinitésimal en sphérique s'écrit $\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$ après intégration sur θ et φ) est

$$\mathcal{P}(t) = \iiint_{r>R} \vec{\jmath}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V = \int_R^\infty 4\pi r^2\,\mathrm{d}r \times \frac{\gamma\, q^2(t)}{(4\pi\varepsilon_0 r^2)^2} = \frac{\gamma\, q^2(t)}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

et l'énergie dissipée pendant la décharge est

$$\boxed{\mathcal{E} = \int_0^\infty \mathcal{P}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\gamma\, q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{2\,t}{\tau}\right)\mathrm{d}t = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}}$$

C'est aussi l'énergie qui était stockée sous forme électrique à $t = 0$. Puisque la densité d'énergie électrique est $u_E = \varepsilon_0 E^2/2$, on calcule

$$\boxed{\mathcal{E} = \iiint_{r>R} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\,\mathrm{d}V = \int_R^\infty \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\,\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}}$$