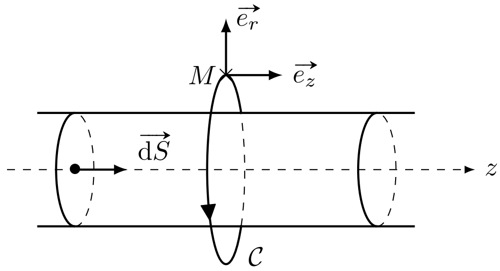
EM7-TD

Correction

EM7 — 01 Bilan énergétique d'un fil conducteur

1) On commence par un schéma.



L'intensité vaut

$$I = \iint_S \vec{\jmath} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = j\,\pi\,a^2$$

car $\vec{\jmath}$ est uniforme, $\vec{\jmath} = j\,\vec{e_z}$. Ensuite, la loi d'Ohm locale donne

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{\jmath}}{\gamma} = \frac{I}{\pi\,a^2\,\gamma}\,\vec{e_z}}$$

2) C'est de la magnétostatique. Le plan $(M, \vec{e_r}, \vec{e_z})$ est un plan de symétrie de la distribution des courants donc d'antisymétrie de $\vec{B}$ donc $\vec{B}$ est selon $\vec{e_\theta}$. Ensuite le cylindre est infini donc il y a invariance par translation suivant $\vec{e_z}$. La géométrie cylindrique conduit à une invariance par rotation autour de $\vec{e_z}$. Finalement $\vec{B} = B(r)\,\vec{e_\theta}$. On choisit comme contour d'Ampère un cercle $\mathcal{C}$ d'axe $(0z)$ passant par M. Alors

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 2\,\pi\,r\,B(r)$$

Le théorème d'Ampère permet finalement d'écrire

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0\,I \qquad \text{si } M \text{ est à l'extérieur, et} \qquad \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0\,j\,\pi\,r^2 \qquad \text{s'il est à l'intérieur.}$$

Donc

$$\boxed{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0\,I}{2\,\pi\,r}\,\vec{e_\theta} \qquad \text{si } M \text{ est à l'extérieur, et} \qquad \vec{B}(r) = \frac{\mu_0\,I\,r}{2\,\pi\,a^2}\,\vec{e_\theta} \qquad \text{s'il est à l'intérieur.}}$$

3) Directement,

$$\boxed{\vec{E}(a) = \frac{I}{\pi\,a^2\,\gamma}\,\vec{e_z} \qquad \text{et} \qquad \vec{B}(a) = \frac{\mu_0\,I}{2\,\pi\,a}\,\vec{e_\theta}}$$

Puis on calcule

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}(a) \wedge \vec{B}(a)}{\mu_0} = -\frac{I^2}{2\,\pi^2\,a^3\,\gamma}\vec{e_r}$$

Le signe « $-$ » s'interprète par le fait que le conducteur dissipe l'énergie par effet Joule. La puissance du champ électromagnétique va donc vers le conducteur pour assurer la conservation de l'énergie. On peut aussi commenter que $\vec{\Pi}$ est en I^2, ce qui témoigne à nouveau de la présence d'un effet Joule.