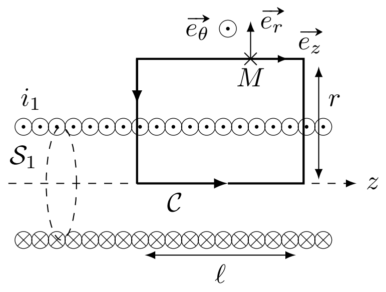
EM4-TD

Correction

EM4 — 12 Coefficient d'inductance mutuelle

1) On suppose pour le calcul du champ que le solénoïde est infini en longueur. Cela revient à négliger les effets de bords. On introduit un point M quelconque sur le schéma du solénoïde extérieur 1, avec la base cylindrique associée. Le nombre de spire par unité de longueur est $n_1 = N_1 \,/\, L$.



Le plan $(M,\,\vec{e_r},\,\vec{e_\theta})$ est un plan de symétrie des courants, donc un plan d'antisymétrie du champ magnétostatique $\vec{B}$, qui est par conséquent orthogonal à ce plan :

$$\vec{B} = B(r,\,\theta,\,z)\,\vec{e_z}$$

Par ailleurs, le solénoïde étant considéré infini en longueur, la distribution des courants est invariante par translation selon l'axe (Oz) ; et la géométrie cylindrique se traduit par une invariance par rotation autour de l'axe (Oz). Le champ a au moins les mêmes invariances, donc

$$\vec{B} = B(r)\,\vec{e_z}$$

Ensuite, la circulation de $\vec{B}$ sur le contour d'Ampère $\mathcal{C}$ orienté représenté sur le schéma vaut

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot\vec{\mathrm{d}\ell} &= \int_{\text{bas}} \vec{B}\cdot\vec{\mathrm{d}\ell} + \int_{\text{droite}} \vec{B}\cdot\vec{\mathrm{d}\ell} + \int_{\text{haut}} \vec{B}\cdot\vec{\mathrm{d}\ell} + \int_{\text{gauche}} \vec{B}\cdot\vec{\mathrm{d}\ell} \\
&= B(0)\,\ell + 0 + B(r)\,(-\ell) + 0 \\
&= \big(B(0) - B(r)\big)\,\ell \\
&= B(0)\,\ell \qquad\qquad \text{car le champ magnétostatique est nul en dehors du solénoïde } B(r) = 0.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, le théorème d'Ampère stipule que cette circulation vaut

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot\vec{\mathrm{d}\ell} = \mu_0\, I_{\text{enlacée}} = +\mu_0\, n_1\, \ell\, i_1$$

(Les courants étant comptés algébriquement avec la règle du pouce). Alors

$$B(0) = \mu_0\, n_1\, i_1$$

Par ailleurs, le choix de la partie basse du contour d'Ampère est quelconque. En la choisissant à une distance r_b de l'axe (Oz), on aurait montré avec exactement le même calcul que

$$B(r_b) = \mu_0\, n_1\, i_1 = B(0) \qquad \text{pour } r_b < R_1 \text{ quelconque.}$$

On conclut que le champ magnétostatique est homogène à l'intérieur du solénoïde et ainsi

$$\boxed{\overrightarrow{B_{\text{int}}} = \mu_0\, n_1\, i_1\, \vec{e_z} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{B_{\text{ext}}} = \vec{0}}$$

2) Calculons le flux propre du circuit 1. La surface $\mathcal{S}_1$ est représentée sur le schéma. On a $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}S\,\vec{e_z}$.

$$\phi_1 = \iint_{\text{solénoïde 1}} \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = N_1 \iint_{\mathcal{S}_1} \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = N_1 \iint_{\mathcal{S}_1} B_{\text{int}}\,\vec{e_z}\cdot\mathrm{d}S\,\vec{e_z} = \mu_0\, N_1\, n_1\, S_1\, i_1$$

On identifie, en sachant que $\phi_1 = L_1\, i_1$,

$$L_1 = \mu_0\, N_1\, n_1\, S_1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{L_1 = \mu_0\, \frac{N_1^2\, \pi\, R_1^2}{L} = 97\ \text{mH.}}$$

3) Par analogie $\boxed{L_2 = \mu_0\, \frac{N_2^2\, \pi\, R_2^2}{L} = 12\ \text{mH.}}$

4) On calcule cette fois le flux du champ magnétostatique $\vec{B}$ créé par le circuit 1 (et calculé précédemment) à travers le solénoïde 2.

$$\phi_{1\to 2} = \iint_{\text{solénoïde 2}} \vec{B}\cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = N_2 \iint_{\mathcal{S}_2} \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = N_2 \iint_{\mathcal{S}_2} B_{\text{int}}\, \vec{e_z}\cdot \mathrm{d}S\, \vec{e_z} = N_2\, (\mu_0\, n_1\, i_1)\, S_2$$

On identifie, en sachant que $\phi_{1\to 2} = M\, i_1$,

$$M = \mu_0\, N_2\, n_1\, S_2 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{M = \mu_0\, \frac{N_1\, N_2\, \pi\, R_2^2}{L} = 17\ \text{mH.}}$$

5) On calcule

$$M^2 = \mu_0^2\, \frac{N_1^2\, N_2^2\, \pi^2\, R_2^4}{L^2} = \mu_0^2\, \frac{N_1^2\, N_2^2\, \pi^2\, R_2^2\, R_1^2}{L^2}\, \frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{R_2^2}{R_1^2}\, L_1\, L_2 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{M^2 < L_1\, L_2 \qquad \text{car} \qquad R_1 > R_2.}$$