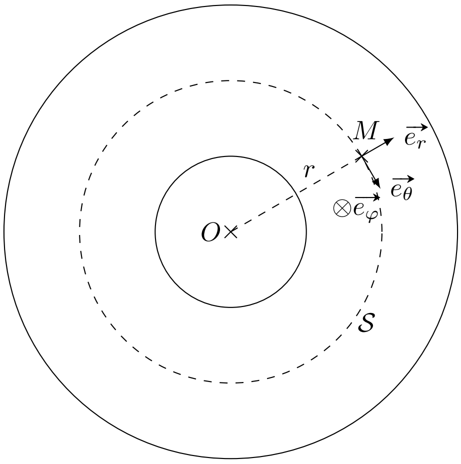
EM1-TD

Correction

EM1 — 16 Condensateur sphérique

1) On introduit un point M quelconque sur le schéma agrandi, avec la base sphérique associée.



Les charges sont réparties en surface sur les armatures sphériques. Les plans $(M, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ et $(M, \vec{e_r}, \vec{e_\varphi})$ sont ainsi des plans de symétrie de la distribution de charges, donc aussi de $\vec{E}$. Puisqu'un champ de vecteurs appartient à ses plans de symétrie, on déduit

$$\vec{E} = E(r, \theta, \varphi)\,\vec{e_r}$$

Par ailleurs, la distribution de charges est invariante par rotation selon les angles θ et φ. Le champ $\vec{E}$ possède au moins les mêmes invariances donc finalement

$$\boxed{\vec{E} = E(r)\,\vec{e_r}}$$

2) On considère comme surface de Gauss $\mathcal{S}$ la sphère de centre O passant par M, orientée sortante ($\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}S\,\vec{e_r}$), représentée en pointillé sur le schéma en coupe. Le flux du champ $\vec{E}$ à travers cette surface est

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \oiint_{\mathcal{S}} E(r)\,\mathrm{d}S = E(r) \oiint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}S = 4\,\pi\,r^2\,E(r)$$

Et le théorème de Gauss affirme que ce flux vaut

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \qquad \text{avec} \qquad Q_{\text{int}} = +Q \qquad \text{ici.}$$

Par conséquent,

$$E(r) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,\vec{e_r}}$$

Remarque. À l'intérieur de la première armature, pour $r < R_1$, on a $Q_{\text{int}} = 0$ donc $\vec{E} = \vec{0}$. Et à l'extérieur de la deuxième armature, pour $r > R_2$, on a $Q_{\text{int}} = +Q + (-Q) = 0$ donc $\vec{E} = \vec{0}$ aussi. Le champ électrostatique est donc nul en dehors des armatures, comme attendu pour un condensateur.

3) Entre les armatures, le champ $\vec{E}$ est identique à celui d'une charge ponctuelle Q placée en O. Il en va ainsi de même pour le potentiel. On a alors

$$V(r) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r} \qquad \text{en choisissant le potentiel nul à l'infini.}$$

Il en découle que

$$\boxed{V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

4) On définit naturellement la capacité C du condensateur sphérique par $Q = C\,U = C\,(V_1 - V_2)$. On identifie

$$C = \frac{4\,\pi\,\varepsilon_0}{\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{C = \frac{4\,\pi\,\varepsilon_0\,R_2\,R_1}{R_2 - R_1}}$$