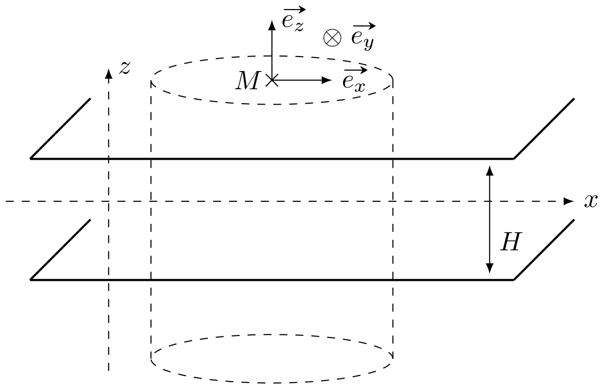
EM1-TD

Correction

EM1 — 15 Terre plate (Résolution de problème)



1) Commençons par calculer le champ gravitationnel à la surface de la « vraie » Terre. Il vaut en norme

$$||\vec{\mathcal{G}}|| = \frac{G\,M_T}{R_T^2} \approx 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

et la masse volumique moyenne de la Terre est

$$\varrho = \frac{3\,M_T}{4\,\pi\,R_T^3} = 5{,}4 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Pour la suite de l'exercice, on suppose la Terre plate, infinie dans les directions x et y et d'épaisseur H dans la direction z.

L'idée est de calculer le champ gravitationnel en $z = H\,/\,2$ pour cette Terre de masse volumique identique ϱ. Pour cela, on cherche à appliquer le théorème de Gauss gravitationnel

$$\oint\!\!\!\oint_{\mathcal{S}} \vec{\mathcal{G}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = -4\,\pi\,G\,M_{\text{int}}$$

On commence par considérer un point M quelconque de l'espace et on munit l'espace d'un repère cartésien, adapté à cette géométrie plane.

Déjà, les plans $(M, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_z})$ et $(M, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ sont des plans de symétrie de la distribution des masses donc des plans de symétrie de $\vec{\mathcal{G}}$, et donc $\vec{\mathcal{G}}$ est selon $\overrightarrow{e_z}$. Ensuite, la distribution des masses est invariante par translation selon $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$, car le système est infini dans ces directions. Le champ de gravitation ne peut donc pas dépendre de x et de y. Finalement, l'étude des symétries et des invariances conduit à écrire

$$\vec{\mathcal{G}} = \mathcal{G}(z)\,\overrightarrow{e_z}$$

On choisit comme surface de Gauss le cylindre de section S, passant par M et symétrique par rapport au plan $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$. Le flux de $\vec{\mathcal{G}}$ sur les parois latérales est nul car $\vec{\mathcal{G}}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$. Par ailleurs, par symétrie, le flux à travers la surface basse est égal à celui à travers la surface haute. Par conséquent

$$\oint\!\!\!\oint_{\mathcal{S}} \vec{\mathcal{G}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = 2 \iint_{\text{haute}} \mathcal{G}(z)\,\overrightarrow{e_z} \cdot \mathrm{d}S\,\overrightarrow{e_z} = 2\,\mathcal{G}(z)\,S$$

puis la masse intérieure est

$$M_{\text{int}} = \text{« masse volumique} \times \text{volume où il y a de la masse »} = \varrho \times H\,S$$

car il y a des masses seulement entre $-H\,/\,2$ et $H\,/\,2$. Le théorème de Gauss gravitationnel donne donc

$$\mathcal{G}(z) = -2\,\pi\,G\,\varrho\,H$$

indépendant de z (ce dont on pouvait se douter, par analogie avec le champ électrique d'un plan uniformément chargé qui est constant également). À la surface de cette Terre plate, en $z = H\,/\,2$, on a donc

$$||\vec{\mathcal{G}}|| = 2\,\pi\,G\,\varrho\,H$$

On veut que ce champ gravitationnel vale $G\,M_T\,/\,R_T^2$, il faut donc

$$\boxed{H = \frac{M_T}{2\,\pi\,\varrho\,R_T^2} = 4{,}3 \times 10^3 \text{ km}}$$

qui est du même ordre de grandeur que le rayon de la Terre. *(On rappelle pour l'application numérique que $R_T = 6{,}38 \times 10^3$ km et $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg.)*