EM1-TD

Correction

EM1 — 11 Potentiel de Yukawa

1) Par analogie avec le potentiel de Coulomb $V(r) = q\,/\,(4\,\pi\,\varepsilon_0\,r)$, on sait que Q **est une charge** (en coulomb). Et l'argument d'une fonction mathématique, ici l'exponentielle, est toujours sans dimension donc a **est une longueur** (en mètre).

2) On calcule directement à l'aide du gradient en sphérique, et puisque V ne dépend que de r,

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\,\vec{e_r} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\vec{E} = E(r)\,\vec{e_r} = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)\,\exp\left(-\frac{r}{a}\right)\,\vec{e_r}}$$

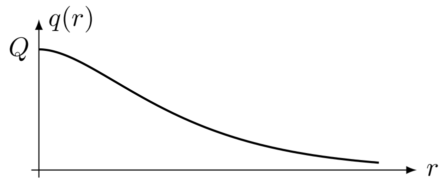
3) On peut utiliser le théorème de Gauss, non pas pour déterminer $\vec{E}$, mais pour déterminer Q_{int} ! La charge contenue dans la boule délimitée par la sphère $\mathcal{S}$ de rayon r est, en utilisant que $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}S\,\vec{e_r}$,

$$q(r) = \varepsilon_0 \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \varepsilon_0 \oiint_{\mathcal{S}} E(r)\,\vec{e_r}\cdot\mathrm{d}S\,\vec{e_r} = \varepsilon_0\,E(r) \oiint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}S = 4\,\pi\,r^2\,\varepsilon_0\,E(r)$$

Plus explicitement

$$\boxed{q(r) = Q\,\left(1+\frac{r}{a}\right)\,\exp\left(-\frac{r}{a}\right)}$$

et donc $q(0) = Q$ et $q(\infty) = 0$. Cela correspond au cas d'un noyau ponctuel de charge $+Q$ en O entouré d'un nuage électronique de charge totale $-Q$ étendu entre $r = 0$ et $r = \infty$. De cette image on déduit que a est le rayon typique du nuage électronique. On trace



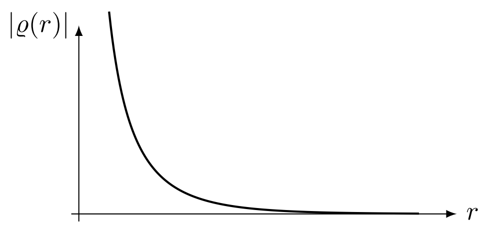
4) La charge comprise dans un élément de volume $\mathrm{d}\tau$ est $\mathrm{d}q = \varrho\,\mathrm{d}\tau$. En sphérique, le volume $\mathrm{d}\tau$ entre la sphère de rayon r et $r+\mathrm{d}r$ est $4\,\pi\,r^2\,\mathrm{d}r$ (c'est en fait « surface × épaisseur » !). On écrit donc

$$\mathrm{d}q = \varrho(r)\,4\,\pi\,r^2\,\mathrm{d}r \qquad \text{soit} \qquad \varrho(r) = \frac{1}{4\,\pi\,r^2}\,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}r}$$

On calcule

$$\boxed{\varrho(r) = -\frac{Q}{4\,\pi\,a^2\,r}\,\exp\left(-\frac{r}{a}\right)}$$

qui est bien négatif, conformément à notre intuition de nuage électronique autour d'un noyau positif. On trace



Remarque. Si l'énoncé nous donnait la divergence en sphérique, nous aurions aussi pu déterminer la densité volumique de charge par l'équation de Maxwell-Gauss

$$\varrho = \varepsilon_0\,\mathrm{div}\,\vec{E}$$