

Correction

EM10 – 06 Inductance mutuelle

1) On applique la loi des mailles sur chacun des deux circuits

$$E = R i_1 + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad 0 = R i_2 + L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

2) $X = i_1 + i_2$ et $Y = i_1 - i_2$. En sommant et en différenciant les deux équations de la question précédente on obtient

$$E = R X + (L + M) \frac{dX}{dt} \quad \text{et} \quad E = R Y + (L - M) \frac{dY}{dt}$$

3) Continuité de i_1 et i_2 à cause des bobines. Or $i_1(0^-) = i_2(0^-) = 0$ donc $i_1(0^+) = i_2(0^+) = 0$. Les équations différentielles découplées s'intègrent en

$$X(t) = X_0 \exp\left(-\frac{(L+M)t}{R}\right) + \frac{E}{R} \quad \text{et} \quad Y(t) = Y_0 \exp\left(-\frac{(L-M)t}{R}\right) + \frac{E}{R}$$

mais $X(0) = Y(0) = 0$ d'après les relations de continuité donc

$$X(t) = \frac{E}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{(L+M)t}{R}\right)\right) \quad \text{et} \quad Y(t) = \frac{E}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{(L-M)t}{R}\right)\right)$$

on calcule ensuite

$$i_1 = \frac{X+Y}{2} \quad \text{et} \quad i_2 = \frac{X-Y}{2}$$

4) On multiplie la loi des mailles pour la maille de gauche par i_1 , et celle de droite par i_2 . En sommant les deux résultats et en multipliant par dt , on obtient

$$E i_1 dt = R i_1^2 dt + R i_2^2 dt + d\left(\frac{1}{2} L i_1^2\right) + d\left(\frac{1}{2} L i_2^2\right) + d(M i_1 i_2)$$

Les termes s'interprètent dans l'ordre comme : l'énergie fournie par le générateur pendant dt , l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance de gauche pendant dt , l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance de droite pendant dt , l'énergie stockée dans la bobine de gauche pendant dt , l'énergie stockée dans la bobine de droite pendant dt , et enfin l'énergie stockée par inductance mutuelle pendant dt .