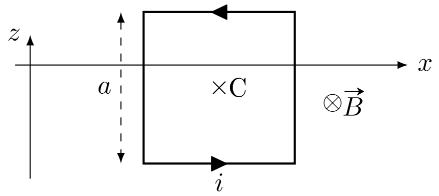
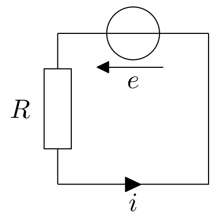
EM10-TD

Correction

EM10 — 02 Chute d'un cadre

1) On commence par préciser les conventions d'orientation (arbitraires) en faisant le schéma de gauche.





Tant que $z_C > a/2$, le cadre est en chute libre. Idem pour $z_C < -a/2$ (les forces de Laplace se compensent deux à deux). Entre les deux, il y a une variation du flux du champ magnétique dans le cadre. Il y a donc un phénomène d'induction supplémentaire.

2) La loi de Faraday donne

$$e = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -B\,a\,\dot{z_C} = -B\,a\,v_C \qquad \text{car} \qquad \phi = -B\,a\left(\frac{a}{2} - z_C\right)$$

Le circuit électrique équivalent est représenté sur le schéma de droite. L'équation électrique est la loi des mailles $e = R\,i$. Ensuite, le bord haut du cadre n'est pas dans le champ magnétique, donc ne subit pas la force de Laplace. Les bords latéraux du cadre subissent des forces qui se compensent exactement. Le bord bas du cadre subit la force de Laplace

$$\vec{F} = \int_{x_0}^{x_0+a} i\,\mathrm{d}x\,\vec{e_x} \wedge \vec{B} = +i\,a\,B\,\vec{e_z}$$

avec x_0 l'abscisse du bord gauche. Le TCM appliqué au cadre et projeté sur l'axe vertical donne

$$m\,\dot{v_C} = i\,a\,B - m\,g = -\frac{(B\,a)^2}{R}\,v_C - m\,g$$

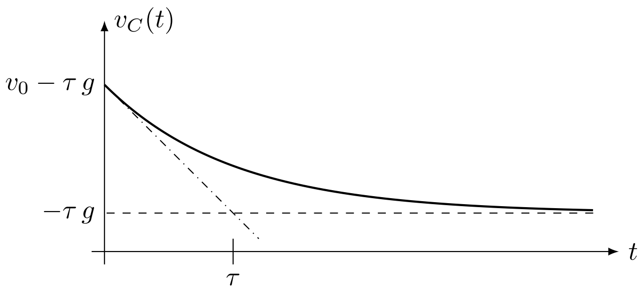
où on a remplacé $i = e\,/\,R$ par son expression. L'équation du mouvement dans la phase intermédiaire est donc

$$\boxed{\dot{v_C} + \frac{(B\,a)^2}{m\,R}\,v_C = -g}$$

On résout

$$v_C(t) = v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \tau\,g \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{m\,R}{(B\,a)^2}$$

La constante d'intégration v_0 se détermine avec les conditions initiales. Il faut préciser la vitesse du cadre au moment où le bord du bas traverse l'axe $z = 0$, choisi comme origine des temps. Pour déterminer z_C il suffit d'intégrer v_C, avec la condition initiale $z_C(t = 0) = -a/2$. On suppose $v_0 > 0$ pour le graphique suivant.



3) Pour réaliser le bilan énergétique, on multiplie le TCM par $\dot{z_C} = v_C$. On fait alors apparaître le terme $R\,i^2$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,m\,v_C^2\right) + R\,i^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\,g\,z_C) = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = -R\,i^2}$$

Dans l'équation de gauche, le premier terme correspond à la variation d'énergie cinétique, le deuxième à la puissance dissipée par effet Joule du fait des courants apparus le long du cadre, et le dernier à la variation d'énergie potentielle de pesanteur.