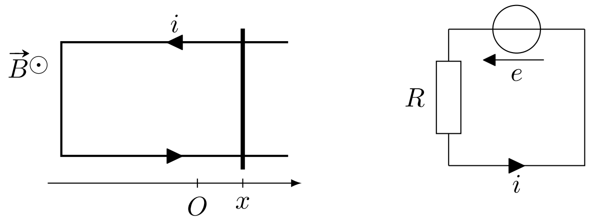
EM10-TD

Correction

EM10 — 01 Rails de Laplace

1) On observe des oscillations à cause du ressort, qui sont amorties par induction.

2) On oriente le schéma (figure de gauche).



La loi de Faraday donne

$$e = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -B\,\ell\,\dot{x}$$

Le schéma électrique équivalent est représenté sur la figure de droite. La loi des mailles conduit à

$$\boxed{e = R\,i \qquad \text{soit} \qquad \dot{x} = -\frac{R\,i}{B\,\ell} \qquad \text{ou encore} \qquad i = -\frac{\ell\,B\,\dot{x}}{R}}$$

3) La tige mobile est soumise à la force du ressort $-k\,x\,\vec{e_x}$ et à la force de Laplace

$$\vec{F} = \int_0^{\ell} i\,\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i\,\ell\,B\,\vec{e_x}$$

On applique le TCM à la tige de masse m dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen

$$m\,\vec{a} = -k\,x\,\vec{e_x} + i\,\ell\,B\,\vec{e_x} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + \omega_0^2\,x = 0}$$

avec $\omega_0^2 = k/m$ et $\tau = m\,R/(\ell\,B)^2$.

4) Il y a un régime pseudo-périodique si le discriminant est négatif

$$\Delta = \frac{1}{\tau^2} - 4\,\omega_0^2 < 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\omega_0 > \frac{1}{2\,\tau}}$$

Dans ce cas, en notant $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 1/(4\,\tau^2)}$, la solution prend la forme

$$x(t) = \Big(A\,\cos(\omega\,t) + B\,\sin(\omega\,t)\Big)\,\mathrm{e}^{-t/(2\,\tau)}$$

Les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$ permettent de conclure

$$\boxed{x(t) = x_0\left(\cos(\omega\,t) + \frac{1}{2\,\omega\,\tau}\,\sin(\omega\,t)\right)\,\mathrm{e}^{-t/(2\,\tau)}}$$

5) On multiplie l'équation du mouvement par $\dot{x}$

$$m\,\ddot{x}\,\dot{x} + i\,\ell\,B\,\dot{x} + k\,x\,\dot{x} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2\right) + R\,i^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,k\,x^2\right) = 0$$

Finalement,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = -R\,i^2 \qquad \text{avec} \qquad E_m = \frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\,k\,x^2}$$

L'énergie mécanique de la tige est dissipée par effet Joule.