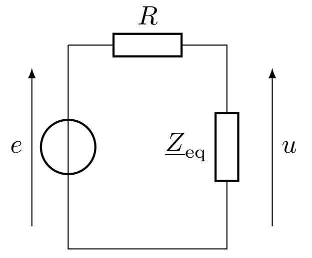
E1-TD

Correction

E1 — 02 Régime sinusoïdal forcé et régime transitoire

1) Le circuit équivalent est représenté ci-contre, avec



$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \frac{2}{R} + \mathrm{j}\,C\,\omega \qquad \text{soit} \qquad \underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{R}{2 + \mathrm{j}\,R\,C\,\omega}$$

La formule du pont diviseur de tension donne

$$\underline{u} = \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{R + \underline{Z}_{\text{eq}}}\,\underline{e} = \frac{R}{3\,R + \mathrm{j}\,R^2\,C\,\omega}\,\underline{e}$$

On calcule finalement

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{u}}{\underline{e}} = \frac{1/3}{1 + \mathrm{j}\,R\,C\,\omega\,/\,3}}$$

2) On a

$$\boxed{\underline{H} \underset{\omega\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad \underline{H} \underset{\omega\to\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Il s'agit donc d'un filtre **passe-bas**. On identifie de plus

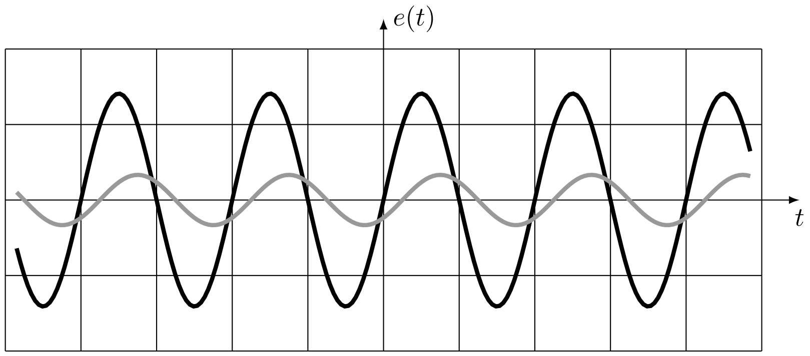
$$\boxed{H_0 = \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad \omega_0 = \frac{3}{R\,C}}$$

3) On calcule

$$\boxed{G = |\underline{H}| = \frac{1/3}{\sqrt{1 + \omega^2\,/\,\omega_0^2}} \qquad \text{et} \qquad \varphi = \arg(\underline{H}) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

Les **limites basse et haute fréquence du déphasage** sont respectivement 0 et $-\pi/2$.

4) Le déphasage vaut $-\pi/4$ lorsque $\omega = \omega_0$. Le gain vaut alors $1\,/\,(3\sqrt{2})$. On trace



5) On a d'après l'expression de la fonction de transfert

$$\left(1 + \mathrm{j}\,\frac{\omega}{\omega_0}\right)\,\underline{u} = \frac{1}{3}\,\underline{e}$$

Puisqu'une multiplication par $\mathrm{j}\,\omega$ en complexe équivaut à une dérivée en réel, l'équation différentielle vérifiée par u est

$$u + \frac{1}{\omega_0}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{e}{3} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0\,u = \frac{\omega_0\,e}{3}}$$

6) On travaille à $t = 0^-$. Si l'interrupteur est ouvert à $t < 0$, alors $i_2 = 0$, donc $i = i_1$. Le condensateur est chargé d'où $i_1 = 0 = i$, et $u = E_0$ par loi des mailles avec $u_R = R\,i = 0$.

7) On travaille à $t = 0^+$. Il y a **continuité de la tension aux bornes du condensateur** soit $u = E_0$, donc par loi des mailles $u_R = 0$ donc $i = u_R \,/\, R = 0$, soit $i_1 = -i_2$. Et $i_2 = 2\,u \,/\, R = 2\,E_0 \,/\, R$ par loi d'Ohm.

8) À $t \to \infty$, le condensateur sera chargé donc $i_1 = 0$, soit $i = i_2 = 2\,E_0 \,/\, (3\,R)$ par loi d'Ohm sur les deux résistances en série, et par conséquent $u = R\,i_2 \,/\, 2 = E_0 \,/\, 3$.

9) La solution particulière est $u = e \,/\, 3 = E_0 \,/\, 3$, et la solution homogène est

$$u_h(t) = A\,\mathrm{e}^{-\omega_0\,t} \qquad \text{soit} \qquad u(t) = A\,\mathrm{e}^{-\omega_0\,t} + \frac{E_0}{3}$$

Avec la condition initiale $u = E_0$, on obtient $A = 2\,E_0 \,/\, 3$ soit finalement

$$\boxed{u(t) = \frac{E_0}{3}\left(1 + 2\,\mathrm{e}^{-\omega_0\,t}\right)}$$

Il s'agit d'une relaxation exponentielle sur un temps typique $\tau = 1 \,/\, \omega_0$.

10) On trace