

D2-TD

Correction

D2 – 16 Température et flux thermique après une mise en contact

1) La mise en contact en $x = 0$ ne modifie pas la température des corps à l'infini. On écrit donc

$$T_1 = T_1(\infty, t) = A_1 - B_1 \quad \text{et} \quad T_2 = T_2(\infty, t) = A_2 + B_2$$

D'autre part, il y a continuité de la température et du flux en $x = 0$ soit

$$T_1(0, t) = T_2(0, t) \quad \text{et} \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(0, t) = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(0, t)$$

d'où l'on tire

$$A_1 = A_2 \quad \text{et} \quad \frac{\lambda_1 B_1}{\sqrt{\pi D_1 t}} = \frac{\lambda_2 B_2}{\sqrt{\pi D_2 t}}$$

or $D_i = \lambda_i / (\mu_i c_i)$. On a par conséquent

$$T_1 = A_1 - B_1, \quad T_2 = A_2 + B_2, \quad A_1 = A_2 \quad \text{et} \quad \sqrt{\lambda_1 \mu_1 c_1} B_1 = \sqrt{\lambda_2 \mu_2 c_2} B_2$$

On peut tout de suite introduire les effusivités pour écrire $E_1 B_1 = E_2 B_2$. On résout enfin le système de quatre équations à quatre inconnues pour obtenir

$$A_1 = A_2 = \frac{E_1 T_1 + E_2 T_2}{E_1 + E_2}, \quad B_1 = E_2 \frac{T_2 - T_1}{E_1 + E_2} \quad \text{et} \quad B_2 = E_1 \frac{T_2 - T_1}{E_1 + E_2}$$

2) La température à l'interface T_i vaut $T_1(0, t) = T_2(0, t)$. C'est donc directement A_1 . On déduit

$$T_i = \frac{E_1 T_1 + E_2 T_2}{E_1 + E_2}$$

c'est-à-dire que la température à l'interface est la moyenne des températures à l'infini, pondérées par les effusivités thermiques des matériaux.

3) Le flux thermique à l'interface est donné par

$$\mathcal{P} = -\lambda_1 S \frac{B_1}{\sqrt{\pi D_1 t}} = -\lambda_2 S \frac{B_2}{\sqrt{\pi D_2 t}}$$

Le flux thermique tend vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$. Les deux matériaux ont en effet eu le temps de se thermaliser, il n'y a donc plus d'échange d'énergie entre eux.

4) Les applications numériques donnent pour le bois et l'acier

$$T_i = 33,9^\circ\text{C} \quad \text{et} \quad T_i = 21,9^\circ\text{C}$$

5) Lorsque l'on marche sur un sol, le régime stationnaire n'a pas le temps de s'établir sur la durée d'un pas. Le modèle du présent exercice d'une mise en contact rapide est donc plus adapté pour décrire une telle situation.