D2-TD

# Correction

## D2 — 13 Température dans une cave - Onde thermique

**1)** Le champ de température est unidimensionnel, et il n'y a pas de source d'énergie dans le sol, considéré comme une phase incompressible et indilatable. On est donc exactement dans le cas du cours, et l'équation vérifiée est l'équation de diffusion

$$D_{\text{th}} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \qquad \text{avec} \qquad D_{\text{th}} = \frac{\lambda}{\rho\, c}$$

En utilisant la forme de solution proposée par l'énoncé, on obtient

$$\underline{f}''(z) - \mathrm{i}\,\omega\, D_{\text{th}}\, \underline{f}(z) = 0$$

qui est une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants dont le polynôme caractéristique est

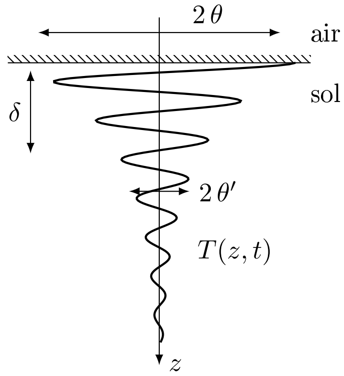
$$X^2 - \mathrm{i}\,\omega\, D_{\text{th}} = 0 \qquad \text{soit} \qquad X = \pm\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\, D_{\text{th}}} = \pm\frac{1+\mathrm{i}}{\delta}$$

La solution de l'équation différentielle est donc

$$\underline{f}(z) = A \exp\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\delta}\, z\right) + B \exp\left(-\frac{1+\mathrm{i}}{\delta}\, z\right)$$

Puisque $T$ tend vers $T_0$ quand $z$ tend vers l'infini, on a forcément $A = 0$. Finalement

$$\underline{T}(z,t) = T_0 + B \exp\left(-\frac{1+\mathrm{i}}{\delta}\, z + \mathrm{i}\,\omega\, t\right)$$




Puis $\underline{T}(z=0,t) = T_0 + \theta\, \exp(\mathrm{i}\,\omega\, t)$ donc $B = \theta$. Finalement, en prenant la partie réelle,

$$\boxed{T(z,t) = T_0 + \theta\, \mathrm{e}^{-z/\delta}\, \cos(\omega\, t - z/\delta)}$$

C'est une **onde progressive** vers les $z$ croissants (en $\omega\, t - z/\delta$) et **atténuée** sur une distance typique $\delta$ (par $\mathrm{e}^{-z/\delta}$).

**2)** $T_0$ est la température moyenne et $\theta$ est l'amplitude de la variation. On a donc

$$T_0 = 10°\text{C} \qquad \text{et} \qquad \theta = 20°\text{C}$$

À 2 m de profondeur, la variation de température est atténuée du facteur $\mathrm{e}^{-z/\delta}$ avec $z = 2$ m. C'est **l'effet de cave**. L'application numérique donne la nouvelle variation $\theta' = \theta\, \mathrm{e}^{-z/\delta}$ par

$$\delta = 2{,}6 \text{ m} \qquad \text{soit} \qquad \theta' = 9{,}2°\text{C}$$

Dans la cave, il fait donc 0,8°C en hiver et 19,2°C en été.

**3)** Cette fois $\omega = (2\,\pi)/\tau'$ avec $\tau' = 1$ jour. On calcule alors

$$\delta = 13 \text{ cm} \qquad \text{soit} \qquad \theta' = \left(8 \times 10^{-6}\right)°\text{C} \approx 0°\text{C}$$

Les variations de températures journalières à la surface n'ont ainsi aucune conséquence sur la température dans la cave, qui reste constante égale à $T_0$. C'est idéal pour conserver les vins.