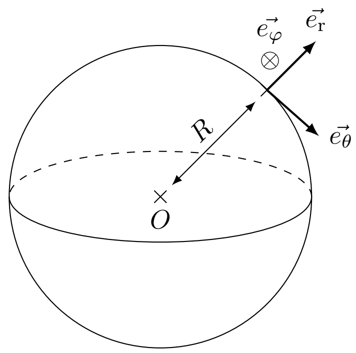
D2-TD

Correction

D2 — 12 Température à l'intérieur de la Terre



1) Le gradient de T est dirigé dans le sens des T croissantes donc vers l'intérieur de la Terre, selon $-\vec{e_r}$. Par ailleurs, la puissance géothermique par unité de surface $\vec{j_{th}}$ s'exprime par la loi de Fourier

$$\vec{j_{th}}(R) = -\lambda\,\overrightarrow{\text{grad}}\,T(R) = -\lambda\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}(R)\,\vec{e_r}$$

En norme,

$$j_{th}(R) = \lambda\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}(R) \approx \lambda\,\frac{\Delta T}{\Delta r} = 0{,}03\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}$$

avec une chute de température $\Delta T = 1$ K pour une variation de profondeur de $\Delta r = 32$ m.
Enfin, la puissance géothermique s'obtient par intégration sur la surface $\mathcal{S}$ de la Terre

$$\mathcal{P} = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{j_{th}}(R)\cdot\vec{\mathrm{d}S} = \oiint_{\mathcal{S}} j_{th}(R)\,\vec{e_r}\cdot\mathrm{d}S\,\vec{e_r} = j_{th}(R)\oiint_{\mathcal{S}}\mathrm{d}S = j_{th}(R)\times 4\,\pi\,R^2$$

On calcule $\mathcal{P} = 1{,}6\times 10^{13}$ W.

2) On réalise un bilan entre une sphère de rayon r et une sphère de rayon entre $r+\mathrm{d}r$. Le volume entre ces deux sphères est $\mathrm{d}V = 4\,\pi\,r^2\,\mathrm{d}r$. En régime permanent, l'énergie thermique qui sort à travers la sphère de rayon $r+\mathrm{d}r$ doit être égale à l'énergie entrée à travers la sphère de rayon r plus l'énergie créée entre r et $r+\mathrm{d}r$. Donc

$$j_{th}(r+\mathrm{d}r)\,4\,\pi\,(r+\mathrm{d}r)^2 = j_{th}(r)\,4\,\pi\,r^2 + \rho\,\times 4\,\pi\,r^2\,\mathrm{d}r$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}(j_{th}\,r^2)}{\mathrm{d}r} = \rho\,r^2 \qquad \text{soit} \qquad j_{th}(r) = \frac{\rho\,r}{3} + \frac{A}{r^2} \qquad \text{avec} \qquad A \text{ une constante.}$$

Ensuite, la loi de Fourier $j_{th} = -\lambda\,\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$ conduit à

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{\rho\,r}{3\,\lambda} - \frac{A}{\lambda\,r^2}$$

en intégrant

$$T(r) = -\frac{\rho\,r^2}{6\,\lambda} + \frac{A}{\lambda\,r} + B \qquad \text{avec} \qquad B \text{ une constante.}$$

T ne peut pas diverger quand $r\to 0$ donc $A = 0$ et $T(R) = T_S$ d'où

$$B = T_S + \frac{\rho\,R^2}{6\,\lambda} \qquad \text{et} \qquad \boxed{T(r) = \frac{\rho}{6\,\lambda}\left(R^2 - r^2\right) + T_S}$$

3) ρ est inconnue mais on connait $j_{th}(R) = \dfrac{\rho\,R}{3}$. On déduit que la température au centre de la Terre T_C vaut

$$T_C = T(0) = T_S + \frac{\rho\,R^2}{6\,\lambda} = T_S + \frac{j_{th}(R)\,R}{2\,\lambda} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{T_C \approx 10^5\ \mathrm{K}}$$

La valeur réelle ne peut bien sûr pas être mesurée directement. On estime cependant que la température à l'interface entre le noyau interne et le noyau externe est 5500 K.

Astuce : Pour la question 2, on a raisonné sur le système compris entre les deux sphères de rayon r et $r+\mathrm{d}r$. On peut en fait mener le bilan différemment. En régime stationnaire, l'énergie contenue dans la boule de rayon r ne varie pas dans le temps : forcément, la puissance créée à l'intérieur de la boule doit être évacuée à sa surface. On peut donc écrire directement

$$\rho\,\frac{4}{3}\,\pi\,r^3 = 4\,\pi\,r^2\,j_{th}(r) \qquad \text{soit} \qquad j_{th}(r) = \frac{\rho\,r}{3}$$

qui est bien sûr le résultat déjà obtenu.