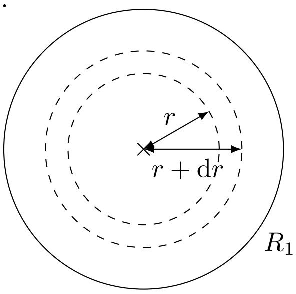
D2-TD

Correction

D2 — 10 Sphère radioactive

1) On choisit comme système une coquille sphérique d'épaisseur $\mathrm{d}r$, entre r et $r + \mathrm{d}r$. Dans ce système se dégage par radioactivité une puissance volumique σ. Entre t et $t + \mathrm{d}t$, cela correspond à une énergie



$$\delta Q_{\mathrm{rad}} = \sigma\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t = 4\,\pi\,r^2\,\mathrm{d}r\,\sigma\,\mathrm{d}t$$

car le volume du système est $\mathrm{d}V = 4\,\pi\,r^2\,\mathrm{d}r$. Par ailleurs, l'énergie qui entre par flux thermique dans le système à travers la sphère de rayon r entre les mêmes instants est

$$\delta Q_{\mathrm{e}} = \left(\oint\!\!\!\oint_{\mathcal{S}(r)} \overrightarrow{j_Q}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}\right)\mathrm{d}t = 4\,\pi\,r^2\,j_Q(r)\,\mathrm{d}t$$

tandis que l'énergie qui sort par flux thermique du système à travers la sphère de rayon $r + \mathrm{d}r$ est

$$\delta Q_{\mathrm{s}} = \left(\oint\!\!\!\oint_{\mathcal{S}(r+\mathrm{d}r)} \overrightarrow{j_Q}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}\right)\mathrm{d}t = 4\,\pi\,(r+\mathrm{d}r)^2\,j_Q(r+\mathrm{d}r)\,\mathrm{d}t$$

En régime stationnaire, l'énergie de la coquille ne varie pas dans le temps, si bien que le bilan énergétique s'écrit

« ce qui sort = ce qui est entré + ce qui a été produit par radioactivité »

soit

$$\delta Q_{\mathrm{s}} = \delta Q_{\mathrm{e}} + \delta Q_{\mathrm{rad}}$$

Finalement

$$4\,\pi\,(r+\mathrm{d}r)^2\,j_Q(r+\mathrm{d}r)\,\mathrm{d}t = 4\,\pi\,r^2\,j_Q(r)\,\mathrm{d}t + 4\,\pi\,r^2\,\mathrm{d}r\,\sigma\,\mathrm{d}t$$

On calcule alors

$$4\,\pi\,(r+\mathrm{d}r)^2\,j_Q(r+\mathrm{d}r) - 4\,\pi\,r^2\,j_Q(r) = \frac{\mathrm{d}(4\,\pi\,r^2\,j_Q(r))}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r = 4\,\pi\,r^2\,\mathrm{d}r\,\sigma$$

donc

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}(r^2\,j_Q(r))}{\mathrm{d}r} = \sigma\,r^2}$$

qui est l'**équation de conservation de l'énergie en stationnaire** (en fait $\mathrm{div}\,\overrightarrow{j_Q} = \sigma$ en sphérique !).

2) En intégrant

$$r^2\,j_Q(r) = \sigma\,\frac{r^3}{3} + A \qquad \text{avec} \qquad A \text{ une constante d'intégration.}$$

et donc

$$j_Q(r) = \frac{\sigma\,r}{3} + \frac{A}{r^2}$$

puis la loi de Fourier s'écrit $j_Q(r) = -\lambda\,\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$ en sphérique donc

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{\sigma\,r}{3\,\lambda} - \frac{A}{\lambda\,r^2}$$

Une nouvelle intégration conduit enfin à

$$T(r) = -\frac{\sigma\,r^2}{6\,\lambda} + \frac{A}{\lambda\,r} + B \qquad \text{avec} \qquad B \text{ une constante d'intégration.}$$

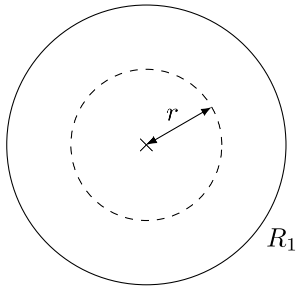
On ne peut pas avoir $T(0) = \infty$ donc $A = 0$ forcément. Et puisque $T(R_1) = T_1$, on calcule $B = T_1 + \dfrac{\sigma\,R_1^2}{6\,\lambda}$ donc

$$\boxed{T(r) = T_1 + \frac{\sigma}{6\,\lambda}\left(R_1^2 - r^2\right)}$$

Autre raisonnement. Plutôt que de raisonner sur la coquille entre r et $r+\mathrm{d}r$, on peut aussi considérer comme système la boule de rayon r.

Dans ce système se dégage par radioactivité une puissance volumique σ. Entre t et $t+\mathrm{d}t$, cela correspond à une énergie

$$\delta Q_{\mathrm{rad}} = \sigma\, V\, \mathrm{d}t = \frac{4}{3}\,\pi\, r^3\, \sigma\, \mathrm{d}t$$



car le volume du système est $V = 4\,\pi\, r^3\,/\,3$. En régime stationnaire, l'énergie dans la boule n'augmente pas : celle libérée par radioactivité est donc complètement évacuée vers l'extérieur à travers la sphère de rayon r, ce qu'on écrit

« ce qui est créé = ce qui sort »

c'est-à-dire

$$\delta Q_{\mathrm{rad}} = \delta Q_{\mathrm{s}} = \left(\oiint_{\mathcal{S}(r)} \overrightarrow{j_Q} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \right) \mathrm{d}t = 4\,\pi\, r^2\, j_Q(r)\, \mathrm{d}t$$

On a ainsi

$$r^2\, j_Q(r) = \frac{\sigma\, r^3}{3} \qquad \text{soit} \qquad j_Q(r) = \frac{\sigma\, r}{3}$$

qui est bien sûr le même résultat que précédemment.