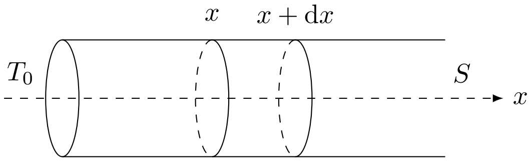
D2-TD

Correction

D2 — 09 Ailette de refroidissement

1) On considère le système entre x et $x + \mathrm{d}x$.



Ce système évacue de l'énergie par sa surface latérale, contrairement au cas étudié dans le cours où les parois latérales étaient calorifugées. Il faut donc reprendre le bilan d'énergie. En régime permanent, l'énergie du système ne varie pas donc on peut écrire entre t et $t + \mathrm{d}t$

« l'énergie qui entre en x = l'énergie qui sort par les parois latérales + l'énergie qui sort en $x + \mathrm{d}x$ »

soit

$$j_{\mathrm{th}}(x)\, S\, \mathrm{d}t = \mathrm{d}\mathcal{P}_{\mathrm{lat}}\, \mathrm{d}t + j_{\mathrm{th}}(x + \mathrm{d}x)\, S\, \mathrm{d}t$$

où $S = \pi\, a^2$. On calcule alors

$$\frac{\mathrm{d}j_{\mathrm{th}}}{\mathrm{d}x}\, \mathrm{d}x = -\frac{h\left(T(x) - T_a\right)}{S}\, \mathrm{d}S_{\mathrm{lat}}$$

où $\mathrm{d}S_{\mathrm{lat}} = 2\,\pi\, a\, \mathrm{d}x$. En utilisant la loi de Newton rappelée par l'énoncé, on aboutit à

$$\frac{\mathrm{d}j_{\mathrm{th}}}{\mathrm{d}x} = -\frac{2\, h\left(T(x) - T_a\right)}{a}$$

Il reste alors à utiliser la loi de Fourier, à 1D ici,

$$j_{\mathrm{th}} = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} = \frac{2\, h\left(T(x) - T_a\right)}{\lambda\, a}$$

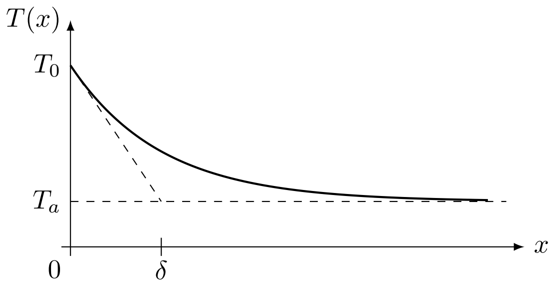
On tombe sur une équation différentielle ordinaire linéaire du second ordre à coefficient constant avec un second membre constant. La solution est

$$T(x) = T_a + A\, \mathrm{e}^{-x/\delta} + B\, \mathrm{e}^{+x/\delta} \qquad \text{avec} \qquad \delta = \sqrt{\frac{\lambda\, a}{2\, h}}$$

Le champ de température ne peut physiquement pas tendre vers l'infini lorsque x tend vers l'infini, donc forcément $B = 0$. Par ailleurs, on suppose le contact thermique avec le thermostat en $x = 0$ parfait. Par conséquent $T(0) = T_0$ et donc $A = T_0 - T_a$. Finalement, le champ de température dans le barreau est

$$\boxed{T(x) = T_a + (T_0 - T_a)\, \mathrm{e}^{-x/\delta}}$$

On peut tracer



2) Pour évaluer la puissance totale évacuée vers l'extérieur, il suffit de sommer les puissances évacuées sur chacun des tronçons de longueur $\mathrm{d}x$:

$$\mathcal{P}_{\mathrm{lat,tot}} = \int_0^\infty \mathrm{d}\mathcal{P}_{\mathrm{lat}} = 2\,\pi\, a\, h \int_0^\infty \left(T(x) - T_a\right) \mathrm{d}x = 2\,\pi\, a\, h\left(T_0 - T_a\right) \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x/\delta}\, \mathrm{d}x$$

soit finalement

$$\boxed{\mathcal{P}_{\mathrm{lat,tot}} = 2\,\pi\, a\, h\left(T_0 - T_a\right) \delta}$$