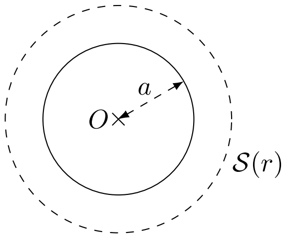
D2-TD Correction

D2 — 07 Fonte d'un glaçon

1) On introduit la sphère fermée orientée sortante $\mathcal{S}(r)$ de rayon r, tel que $r > a$.



En régime stationnaire, il y a conservation du flux thermique : la puissance thermique qui traverse la sphère de rayon r est identique à celle qui traverse la sphère de rayon r' (il n'y a pas d'accumulation d'énergie entre r et r' en régime stationnaire, toute l'énergie qui entre doit aussi sortir). Ainsi le flux thermique sortant d'une sphère est

$$\mathcal{P} = \text{Cste} = \oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{j_Q} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = 4\,\pi\,r^2\,j_Q(r) \qquad \text{donc} \qquad j_Q(r) = \frac{\mathcal{P}}{4\,\pi\,r^2}$$

Par ailleurs la loi de Fourier en coordonnées sphériques donne $\quad j_Q(r) = -\lambda\,\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$.
On calcule alors

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{\mathcal{P}}{4\,\pi\,r^2\,\lambda} \qquad \text{soit} \qquad T(r) = \frac{\mathcal{P}}{4\,\pi\,r\,\lambda} + A \qquad \text{avec} \qquad A \text{ une constante d'intégration.}$$

Enfin, on a les conditions aux limites $\quad T(a) = T_1 \quad$ et $\quad T(r \to \infty) = T_2$. $\quad$ En utilisant la première, on trouve

$$A = T_1 - \frac{\mathcal{P}}{4\,\pi\,a\,\lambda} \qquad \text{soit} \qquad T(r) = T_1 + \frac{\mathcal{P}}{4\,\pi\,\lambda}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

et pour finir le flux thermique s'obtient par la deuxième

$$T_2 = T_1 - \frac{\mathcal{P}}{4\,\pi\,\lambda\,a} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\mathcal{P} = 4\,\pi\,\lambda\,a\,(T_1 - T_2)}$$

Le flux est bien négatif (donc entrant) si $T_2 > T_1$. L'eau environnante réchauffe le glaçon. Finalement

$$\boxed{T(r) = T_2 - \frac{(T_2 - T_1)\,a}{r}}$$

2) On considère comme système le glaçon de rayon $a(t)$ et de température T_1 (la température est constante lors de la fusion). Entre t et $t + \mathrm{d}t$, réchauffé par l'eau environnante, il voit une partie $\mathrm{d}m$ (< 0 car la masse de glace diminue) de sa masse se liquéfier. La pression de l'eau environnante ne varie pas, si bien que le processus de changement d'état est monobare. Le premier principe s'écrit donc

$$\mathrm{d}H = \delta Q$$

Le changement d'état de la masse $\mathrm{d}m$ correspond à une variation d'enthalpie

$$\mathrm{d}H = -L_f\,\mathrm{d}m$$

Le signe « $-$ » est présent pour tenir compte du fait que $\mathrm{d}m$ est la variation de la masse de glace, donc elle est négative alors que l'enthalpie reçue est positive.

Par ailleurs, dans le cadre de l'approximation d'un régime quasi-stationnaire, on suppose que l'expression de la puissance obtenue précédemment dans le cas d'un régime stationnaire est encore valable pour une évolution temporelle lente. On a ainsi

$$\delta Q = -\mathcal{P}\,\mathrm{d}t = -4\,\pi\,\lambda\,a\,(T_1 - T_2)\,\mathrm{d}t$$

Le signe « $-$ » est présent pour tenir compte du fait que δQ est le transfert thermique reçu, tandis que $\mathcal{P}$ est le flux thermique sortant. L'évolution de la masse du glaçon vérifie par conséquent

$$-L_f\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -4\,\pi\,\lambda\,a\,(T_1 - T_2) \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\frac{4\,\pi\,\lambda\,a\,(T_2 - T_1)}{L_f}$$

Enfin, le glaçon est sphérique et homogène donc

$$m(t) = \frac{4}{3}\,\pi\,\varrho\,a^3(t) \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 4\,\pi\,\varrho\,a^2\,\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$$

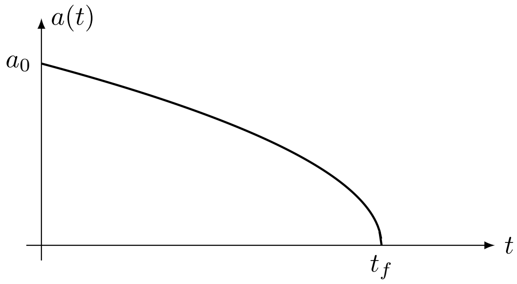
Finalement

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = -\frac{\lambda\,(T_2 - T_1)}{\varrho\,L_f\,a}}$$

qui se résout par séparation des variables

$$a^2(t) - a_0^2 = -\frac{2\,\lambda\,(T_2 - T_1)\,t}{\varrho\,L_f} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{a(t) = \sqrt{a_0^2 - \frac{2\,\lambda\,(T_2 - T_1)\,t}{\varrho\,L_f}}}$$

Ci-dessous une représentation graphique



3) Le glaçon a complètement fondu lorsque $a = 0$ soit

$$\boxed{t_f = \frac{\varrho\,L_f\,a_0^2}{2\,\lambda\,(T_2 - T_1)}}$$

L'application numérique donne

$$\boxed{t_f \approx 47\ \text{min}}$$

Cette valeur légèrement exagérée provient du fait qu'on a pris en compte seulement le processus de diffusion pour fournir de l'énergie au glaçon. En pratique, la variation de température de l'eau environnante provoque de la convection, bien plus efficace pour assurer les transferts thermiques.

Remarque 1. Cet exercice est tout à fait similaire à l'exercice D1-09 sur la dissolution d'un cristal de sel. L'un met en jeu de la diffusion thermique, l'autre de la diffusion de particules, mais les deux raisonnements sont identiques.

Remarque 2. Remarquez que la photo d'illustration peut être trompeuse pour la contextualisation de l'exercice. On suppose en effet la température du milieu extérieur constante, égale à $T_2 = 20°\mathrm{C}$, ce qui est un peu curieux dans le contexte d'un glaçon dans une boisson. Le rôle du glaçon dans ce cas est de refroidir la boisson, ce qu'il réalise effectivement en pratique. Faire l'hypothèse que la température du milieu extérieur (la boisson) est constante n'est donc pas pertinent pour décrire cette situation.

Remarque 3. Quel raisonnement adopteriez-vous pour décrire le refroidissement d'une boisson par un glaçon ?

Idée remarque 3 : On peut faire l'hypothèse que le système { verre + boisson + glaçon } est isolé et en évolution monobare (contact avec l'atmosphère) donc son enthalpie est constante $\Delta H^{\text{tot}} = 0$.