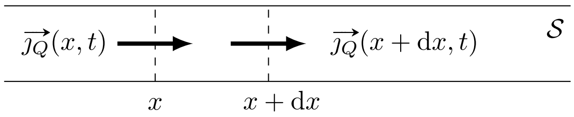
D2-TD
Correction

D2 — 06 Bilan d'entropie 2

Il s'agit de mener un bilan d'entropie, de la même manière que le bilan d'énergie du cours. On travaille sur un système unidimensionnel.



1) La variation d'entropie du système compris entre x et $x+\mathrm{d}x$ entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$ s'écrit

$$\mathrm{d}S = S(t+\mathrm{d}t) - S(t) = \varrho\,\mathcal{S}\,\mathrm{d}x\,s(x,t+\mathrm{d}t) - \varrho\,\mathcal{S}\,\mathrm{d}x\,s(x,t) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\mathrm{d}S = \varrho\,\frac{\partial s}{\partial t}\,\mathcal{S}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}$$

2) Le transfert thermique reçu pendant $\mathrm{d}t$ à travers la section d'abscisse x est $\delta Q(x,t) = j_Q(x,t)\,\mathcal{S}\,\mathrm{d}t$. L'entropie échangée est alors

$$\delta S_{\text{éch}}(x,t) = \frac{\delta Q(x,t)}{T_{\text{ext}}(x,t)} = \frac{j_Q(x,t)}{T(x,t)}\,\mathcal{S}\,\mathrm{d}t$$

De même au niveau de la surface d'abscisse $x+\mathrm{d}x$, on a

$$\delta S_{\text{éch}}(x+\mathrm{d}x,t) = \frac{\delta Q(x+\mathrm{d}x,t)}{T_{\text{ext}}(x+\mathrm{d}x,t)} = -\frac{j_Q(x+\mathrm{d}x,t)}{T(x+\mathrm{d}x,t)}\,\mathcal{S}\,\mathrm{d}t$$

et la paroi latérale est calorifugée donc il n'y a pas d'échange thermique sur les côtés. L'entropie échangée totale est par conséquent

$$\delta S_{\text{éch}} = \delta S_{\text{éch}}(x,t) + \delta S_{\text{éch}}(x+\mathrm{d}x,t) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\delta S_{\text{éch}} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{j_Q}{T}\right)\,\mathcal{S}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x}$$

3) L'entropie créée dans le système entre x et $x+\mathrm{d}x$ entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$ est $\delta S_{\text{créée}} = \sigma\,\mathcal{S}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ d'après l'énoncé. Le second principe s'écrit donc

$$\mathrm{d}S = \delta S_{\text{éch}} + \sigma\,\mathcal{S}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\varrho\,\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{j_Q}{T}\right) + \sigma}$$

après simplification par $\mathcal{S}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$.

4) D'après le cours, l'équation de conservation de l'énergie est

$$\boxed{\varrho\,c\,\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_Q}{\partial x}}$$

Or l'entropie massique d'une phase incompressible indilatable est $s = c\ln T$: le second principe se réécrit ainsi (on développe aussi la dérivée du quotient)

$$\varrho\,c\,\frac{1}{T}\,\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{T}\,\frac{\partial j_Q}{\partial x} + \frac{j_Q}{T^2}\,\frac{\partial T}{\partial x} + \sigma$$

Les deux premiers termes s'annulent du fait de la conservation de l'énergie. On a alors

$$\boxed{\sigma = -\frac{j_Q}{T^2}\,\frac{\partial T}{\partial x}}$$

5) La loi de Fourier s'écrit

$$j_Q = -\lambda\,\frac{\partial T}{\partial x} \qquad \text{qui conduit à} \qquad \boxed{\sigma = \frac{\lambda}{T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2}$$

Enfin, d'après le second principe, l'entropie créée est toujours positive donc $\sigma > 0$. On en déduit que

$$\boxed{\lambda > 0}$$

ce dont nous n'avons jamais douté puisque que l'expérience montre que les flux thermiques vont toujours du chaud vers le froid.