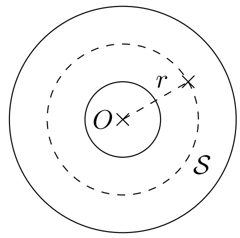
D2-TD

Correction

D2 — 03 Évolution temporelle

1) On introduit la sphère fermée orientée sortante $\mathcal{S}(r)$ de rayon r, tel que $R_1 < r < R_2$.



En régime stationnaire, il y a conservation du flux thermique : la puissance thermique qui traverse la sphère de rayon r est identique à celle qui traverse la sphère de rayon r' (il n'y a pas d'accumulation d'énergie entre r et r' en régime stationnaire, toute l'énergie qui entre doit aussi sortir). Ainsi le flux thermique sortant à travers une sphère est

$$\mathcal{P} = \text{Cste} = \oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{j_Q} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = 4\,\pi\,r^2\,j_Q(r) \qquad \text{donc} \qquad j_Q(r) = \frac{\mathcal{P}}{4\,\pi\,r^2}$$

Par ailleurs la loi de Fourier en coordonnées sphériques donne $\quad j_Q(r) = -\lambda\,\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$.

On calcule alors

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{\mathcal{P}}{4\,\pi\,r^2\,\lambda} \qquad \text{soit} \qquad T(r) = \frac{\mathcal{P}}{4\,\pi\,r\,\lambda} + A \qquad \text{avec} \qquad A \text{ une constante d'intégration.}$$

Enfin, on a les conditions aux limites $\quad T(R_1) = T_1 \quad$ et $\quad T(R_2) = T_2$. En utilisant la première, on trouve

$$A = T_1 - \frac{\mathcal{P}}{4\,\pi\,R_1\,\lambda} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{T(r) = T_1 + \frac{\mathcal{P}}{4\,\pi\,\lambda}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right)}$$

et pour finir le flux thermique s'obtient par la deuxième

$$T_2 = T_1 + \frac{\mathcal{P}}{4\,\pi\,\lambda}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\mathcal{P} = \frac{4\,\pi\,\lambda\,R_1\,R_2}{R_1 - R_2}\,(T_1 - T_2)}$$

Le flux est bien positif (donc sortant) si $T_1 > T_2$.

2) Par définition, une résistance thermique est le lien, en régime stationnaire, entre le flux et la différence de température.

$$T_1 - T_2 = R_{\text{th}}\,\mathcal{P} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{R_{\text{th}} = \frac{R_2 - R_1}{4\,\pi\,\lambda\,R_1\,R_2}}$$

3) On modélise la boule solide de rayon R_1 et de température $T_1(t)$ par une phase incompressible indilatable de capacité thermique C. Le premier principe appliqué à ce système s'écrit

$$\mathrm{d}U = C\,\mathrm{d}T_1 = \delta W + \delta Q$$

La boule ne reçoit aucun travail mais réalise un flux thermique vers l'extérieur. En supposant le régime quasi-stationnaire, c'est-à-dire en supposant que l'expression du flux thermique calculée précédemment en régime stationnaire est encore valable lorsque l'évolution temporelle est lente, on écrit qu'entre t et $t + \mathrm{d}t$, le transfert thermique reçu par la boule est

$$\delta Q = -\mathcal{P}\,\mathrm{d}t = \frac{T_2 - T_1}{R_{\text{th}}}\,\mathrm{d}t$$

Le signe « $-$ » est présent pour tenir compte du fait que δQ est le transfert thermique reçu, tandis que $\mathcal{P}$ est le flux thermique sortant. Finalement

$$C\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t} = \frac{T_2}{R_{\text{th}}} - \frac{T_1}{R_{\text{th}}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t} + \frac{T_1}{R_{\text{th}}\,C} = \frac{T_2}{R_{\text{th}}\,C}}$$

qui se résout en

$$T_1(t) = B\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + T_2 \qquad \text{avec} \qquad \tau = R_{\text{th}}\,C \qquad \text{et} \qquad B \text{ une constante d'intégration.}$$

En écrivant T_i la température de la boule à l'instant $t = 0$, on calcule $B = T_i - T_2$ et on conclut

$$\boxed{T_1(t) = T_i + (T_2 - T_i)\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$$

Remarque. On notera la similitude avec un circuit électrique RC, et on comprend que **la grandeur analogue à la capacité d'un condensateur est la capacité thermique** (d'où le même vocabulaire de « capacité »).