D1-TD

Correction

D1 — 09 Dissolution d'un cristal de sel dans l'eau

1) Il n'y a aucun terme de création ou de disparition. L'équation de conservation est donc celle du cours

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} \overrightarrow{j_N} = 0 \qquad \text{et en régime stationnaire} \qquad \operatorname{div} \overrightarrow{j_N} = 0$$

2) En utilisant l'expression de l'opérateur en coordonnées sphériques, on calcule

$$\operatorname{div} \overrightarrow{j_N} = 0 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2\, j_N)}{\partial r} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{j_N(r) = \frac{A}{r^2}}$$

avec A une constante d'intégration.

3) La loi de Fick $j_N = -D\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}$ conduit à

$$n(r) = \frac{A}{D\, r} + B \qquad \text{avec} \qquad \text{B une constante.}$$

Puis $n(r \to \infty) = 0$ donc $B = 0$, et $n(a) = n_0$ donc $A = n_0\, D\, a$. Finalement,

$$\boxed{n(r) = n_0\, \frac{a}{r}}$$

4) La variation de masse vaut l'opposé du flux sortant de masse (car la masse du cristal diminue $\mathrm{d}m < 0$ quand le flux sortant est positif) à travers la sphère de rayon a

$$\mathrm{d}m = -\left(\oiint \overrightarrow{j_N}\cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}\right)\, \mathrm{d}t \times \frac{M}{\mathcal{N}_A}$$

avec $\mathcal{N}_A$ le nombre d'Avogadro, soit

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\left(\oiint \overrightarrow{j_N}\cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}\right)\frac{M}{\mathcal{N}_A} = -4\,\pi\, a^2\, j_N(a)\,\frac{M}{\mathcal{N}_A} = -\frac{4\,\pi\, n_0\, D\, M}{\mathcal{N}_A}\, a$$

5) On a $m = \mu \times 4\,\pi\, a^3/3$ donc en différentiant

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 4\,\pi\,\mu\, a^2\,\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$$

6) On a donc

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4\,\pi\,\mu\, a^2}\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\frac{n_0\, D\, M}{\mu\,\mathcal{N}_A\, a}$$

qui s'intègre en séparant les variables

$$a\,\mathrm{d}a = -\frac{n_0\, D\, M}{\mu\,\mathcal{N}_A}\,\mathrm{d}t \qquad \text{soit} \qquad \frac{a^2(t)}{2} - \frac{a_0^2}{2} = -\frac{n_0\, D\, M}{\mu\,\mathcal{N}_A}\, t$$

où a_0 est le rayon du cristal à l'instant $t = 0$. Finalement

$$a(t) = \sqrt{a_0^2 - \frac{2\, n_0\, D\, M}{\mu\,\mathcal{N}_A}\, t}$$

Le cristal est complètement dissous ($a = 0$) pour

$$\boxed{t_f = \frac{\mu\,\mathcal{N}_A\, a_0^2}{2\, n_0\, D\, M}}$$