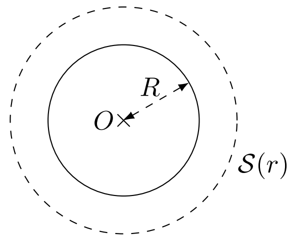
D1-TD

Correction

D1 — 02 Taille critique d'une bactérie aérobie

1) On introduit la sphère fermée orientée sortante $\mathcal{S}(r)$ de rayon r, tel que $r > R$.

Vue la symétrie sphérique du problème, on a $\overrightarrow{j_N} = j_N(r,t)\,\overrightarrow{e_r}$. En **régime stationnaire**, il y a conservation du flux de particules : le nombre de particules qui traversent la sphère de rayon r est identique au nombre de particules qui traversent la sphère de rayon r' (il n'y a pas d'accumulation de particules dans le volume entre r et r' en régime stationnaire, toute les particules qui entrent doivent aussi sortir). Ainsi le flux sortant de particules d'une sphère est



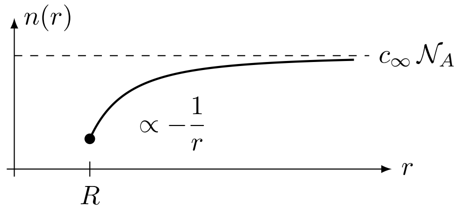
$$\phi = \text{Cste} = \oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{j_N} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = 4\,\pi\,r^2\,j_N(r) \qquad \text{donc} \qquad j_N(r) = \frac{\phi}{4\,\pi\,r^2}$$

Par ailleurs la loi de Fick en coordonnées sphériques donne $\quad j_N(r) = -D\,\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}$.
On calcule alors

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r} = -\frac{\phi}{4\,\pi\,r^2\,D} \qquad \text{soit} \qquad n(r) = \frac{\phi}{4\,\pi\,r\,D} + A \qquad \text{avec} \qquad A \text{ une constante d'intégration.}$$

Enfin, on a la condition aux limites $n(\infty) = c_\infty\,\mathcal{N}_A$, d'où

$$A = c_\infty\,\mathcal{N}_A \qquad \text{soit} \qquad \boxed{n(r) = c_\infty\,\mathcal{N}_A + \frac{\phi}{4\,\pi\,D\,r}}$$



Le flux ϕ est négatif (car entrant).

2) La masse de la bactérie est

$$m = \mu \times \frac{4}{3}\,\pi\,R^3$$

Entre t et $t + \mathrm{d}t$, elle consomme ainsi d'après l'énoncé

$$\mathrm{d}N = \mathcal{A} \times \frac{4}{3}\,\pi\,R^3\,\mu \times \mathrm{d}t \times \mathcal{N}_A$$

molécules de dioxygène. Par ailleurs, entre les mêmes instants t et $t + \mathrm{d}t$, le nombre de molécules de dioxygène qui arrivent à la surface de la bactérie est

$$\mathrm{d}N' = -\phi\,\mathrm{d}t$$

où le signe « $-$ » rend compte du fait que ϕ est le flux sortant alors qu'on veut ici le flux de dioxygène entrant dans la bactérie. En égalisant les deux nombres, on obtient

$$\boxed{\phi = -\mathcal{A}\,\mathcal{N}_A\,\frac{4}{3}\,\pi\,R^3\,\mu}$$

3) On conclut que

$$\boxed{n(r) = \mathcal{N}_A\left(c_\infty - \frac{\mathcal{A}\,\mu\,R^3}{3\,D\,r}\right)}$$

Par ailleurs, $n(r)$ étant un nombre de particules, il est forcément positif. L'expression de $n(r)$ étant minimale en $r = R$, il faut par conséquent avoir

$$n(R) > 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{R < R_c = \sqrt{\frac{3\,D\,c_\infty}{\mathcal{A}\,\mu}} \approx 8\,\mu\text{m}}$$

Ce mécanisme de consommation de dioxygène diffusé dans l'eau permet d'expliquer pourquoi les bactéries aérobies vivant dans l'eau ne pourront jamais être plus grandes que quelques micromètres.