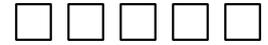


## O 2/3 -TD

## Ondes unidimensionnelles

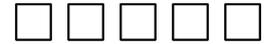
## O2 – 01 Corde de guitare



On étudie une corde de guitare de longueur  $L = 1$  m et dont la fréquence du fondamental est 435 Hz.

- Calculer la vitesse de phase.
- La corde a un diamètre  $d = 1$  mm et est en acier, de masse volumique  $\rho = 7,9 \times 10^3$  kg·m<sup>-3</sup>. En déduire la tension de la corde.

## O2 – 02 Masselotte sur une corde

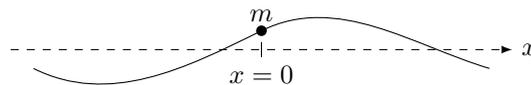


Une masse  $m$  ponctuelle est fixée à l'abscisse  $x = 0$  sur une corde tendue. Une onde incidente (depuis les  $x < 0$ ) progressive (vers les  $x$  croissants) sinusoïdale

$$\underline{y}_i(x, t) = A_i \exp(i(\omega t - kx))$$

donne naissance à une onde réfléchie et une onde transmise

$$\underline{y}_r(x, t) = \underline{A}_r \exp(i(\omega t + kx)) \quad (\text{côté } x < 0) \quad \text{et} \quad \underline{y}_t(x, t) = \underline{A}_t \exp(i(\omega t - kx)) \quad (\text{côté } x > 0)$$



- Justifier la forme des ondes réfléchie et transmise.
- Déterminer l'expression des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude

$$\underline{r} = \frac{\underline{A}_r}{\underline{A}_i} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{\underline{A}_t}{\underline{A}_i}$$

Pour cela, on traduira la continuité de la corde en  $x = 0$  et on écrira le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse  $m$ . Pour simplifier l'approche, on prendra en compte l'inertie de la masse mais pas son poids.

## O2 – 03 Frottements fluides sur une corde de Melde

On considère le dispositif de la corde de Melde. Visiblement à la résonance, l'amplitude ne devient pas infinie. La modélisation du cours n'est pas assez précise pour rendre compte de cela. On propose dans cet exercice de tenir compte des frottements fluides dans la modélisation de la dynamique de la corde. Toutes les autres hypothèses du cours restent identiques (masse linéique  $\mu$ , tension  $T$ ).

On suppose qu'un élément de corde de longueur  $dx$  subit une force de frottement fluide  $d\vec{f} = -h dx \vec{v}$ , avec  $\vec{v}$  la vitesse de cet élément et  $h$  un coefficient de frottement.

- Trouver la nouvelle équation d'onde.
- Obtenir la relation de dispersion pour cette équation d'onde.

On cherche une solution de cette équation d'onde sous la forme  $y(x, t) = \text{Re} \left( \underline{F}(x) \exp(i\omega t) \right)$ .

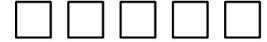
- Établir l'équation vérifiée par  $\underline{F}$ .
- On suppose que  $h \ll \mu \omega$ . Montrer qu'alors

$$\underline{F}(x) \approx \underline{A} \exp(\alpha x) \exp(ikx) + \underline{B} \exp(-\alpha x) \exp(-ikx)$$

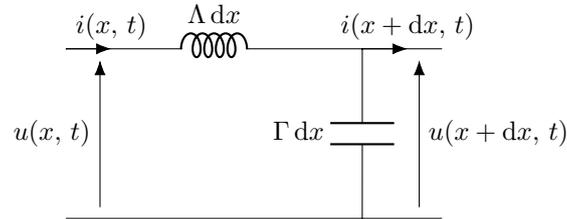
- Les conditions aux limites sont  $y(0, t) = Y_0 \cos(\omega t)$  et  $y(L, t) = 0$ . En déduire  $\underline{y}(x, t)$ .

## O2 – 04 Ligne coaxiale

(Onde de tension dans un câble coaxial, voir TP associé).



Une ligne coaxiale parfaite présente une capacité linéique  $\Gamma$  et une inductance linéique  $\Lambda$ . Un tronçon de longueur  $dx$  de cette ligne peut être modélisé par le schéma électrique ci-dessous.



**Remarque :** Afin d'éviter toute confusion, on précise que dans cet exercice l'intensité et la tension dépendent bien de la position sur la ligne : c'est une situation hors ARQS.

- 1) Établir les deux équations liant  $\frac{\partial u}{\partial x}$  et  $\frac{\partial i}{\partial t}$  ainsi que  $\frac{\partial u}{\partial t}$  et  $\frac{\partial i}{\partial x}$ .
- 2) En déduire que  $u$  et  $i$  vérifient toutes les deux une équation de d'Alembert. Quelle est la célérité des ondes ?
- 3) On considère deux ondes progressives sinusoïdales de tension

$$\underline{u}^+(x, t) = \underline{U}^+ \exp(j(\omega t - kx)) \quad \text{et} \quad \underline{u}^-(x, t) = \underline{U}^- \exp(j(\omega t + kx))$$

associées respectivement aux ondes de courant

$$\underline{i}^+(x, t) = \underline{I}^+ \exp(j(\omega t - kx)) \quad \text{et} \quad \underline{i}^-(x, t) = \underline{I}^- \exp(j(\omega t + kx))$$

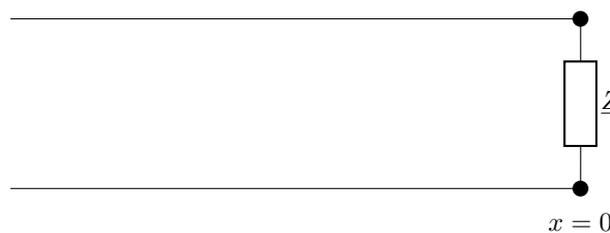
Quel est le lien entre  $\underline{I}^+$  et  $\underline{U}^+$  d'une part, et celui entre  $\underline{I}^-$  et  $\underline{U}^-$  d'autre part ? On notera  $Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$ .

- 4) La ligne coaxiale se termine à l'abscisse  $x = 0$ . Une onde de tension progressive sinusoïdale dans le sens des  $x$  croissants se propage le long de la ligne et est réfléchiée en bout de ligne, si bien que la tension totale s'écrit

$$\underline{u}(x, t) = \underline{U}^+ \exp(j(\omega t - kx)) + \underline{U}^- \exp(j(\omega t + kx))$$

Écrire l'onde de courant correspondante.

- 5) Au bout de la ligne (donc en  $x = 0$ ), il y a une impédance  $\underline{Z}$ .

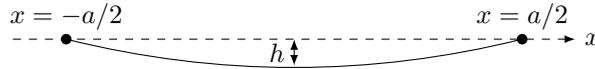


Calculer le coefficient de réflexion en intensité  $\underline{r} = \frac{\underline{I}^-}{\underline{I}^+}$ .

- 6) On étudie plusieurs cas. Si  $\underline{Z}$  est un fil, la ligne est court-circuitée en  $x = 0$ . Que vaut alors le coefficient de réflexion ? Quelle forme prend l'onde de tension ? Et l'onde de courant ?
- 7) Même question si  $\underline{Z}$  est un interrupteur ouvert.
- 8) Même question si  $\underline{Z} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$ . On parle dans ce dernier cas d'**adaptation d'impédance**.

## O2 – 05 Corde pendante

Une corde inextensible et infiniment souple, de masse linéique  $\mu$ , est accrochée à ses deux extrémités, en  $x = -a/2$  et en  $x = a/2$ . Par rapport au cours, on ne néglige plus l'action du poids, et on ne suppose plus les angles par rapport à l'horizontal petits. On cherche à savoir quelle forme prend la corde **au repos**.



1) Montrer que l'équation qui régit la forme de la corde est

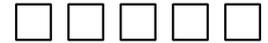
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mu g}{T_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

2) Résoudre cette équation en posant d'abord  $u = dy/dx$ , puis en intégrant deux fois. Comment obtenir  $T_0$  ?

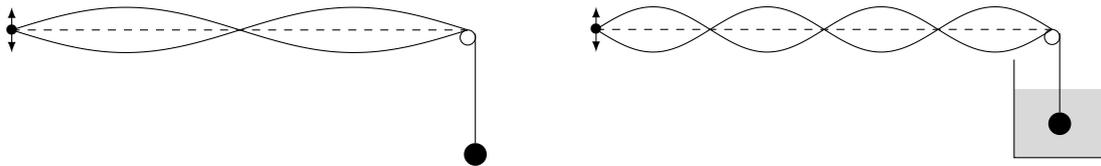
3) Obtenir alors la hauteur  $h$ . En faire l'application numérique pour une corde de masse  $m = 1,9$  g, de longueur  $L = 63$  cm tendue par une tension  $T_0 = 103$  N (guitare). Le fait de négliger le poids dans le cours vous paraît-il raisonnable ?

**Données :** une primitive de  $\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$  est  $\operatorname{argsh}(u)$ , où la fonction  $\operatorname{argsh}(x)$  est la réciproque de la fonction  $\operatorname{sh}(x)$ .

## O2 – 06 Ondes stationnaires (Résolution de problème)



On fait apparaître des vibrations sur une corde à l'aide d'un pot vibrant à  $\omega$ , et dans un premier temps on observe le schéma de gauche.

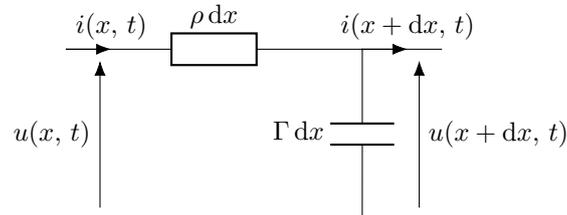


Dans un second temps, on immerge la sphère de masse  $m$  dans un récipient contenant de l'eau et on observe le schéma de droite.

1) Estimer le rayon de la sphère. La masse  $m$  fait 50 g.

## O2 – 07 Ligne dissipative

Un élément de longueur  $dx$  d'une ligne bifilaire est modélisé par le schéma équivalent suivant.



1) Établir l'équation de propagation de l'onde de tension dans la ligne. Comment s'appelle-t-elle ? Donner les propriétés de cette équation.

2) Chercher des solutions stationnaires  $(A \cos(kx) + B \sin(kx)) \exp(-t/\tau)$  pour l'onde de tension. Quelle relation relie  $k$  et  $\tau$  ? On considérera pour conditions aux limites deux court-circuits, en  $x = 0$  et  $x = L$ . Comment appelle-t-on ces solutions ? Décrire leurs évolutions temporelles.

3) À l'instant  $t = 0$ , les condensateurs sont chargés avec une tension  $v(x, t = 0) = 4A \sin^3(\pi x/L)$ . Les conditions aux limites n'ont pas changé. Prévoir sans calcul l'état final de la ligne, puis déterminer  $v(x, t)$ .

## O2 – 08 Absorbeur d'onde

Une corde vibrante sans raideur de longueur  $L$  s'étend entre  $x = 0$  et  $x = L$ . Un expérimentateur impose en  $x = 0$  le déplacement  $y(x = 0, t) = a \cos(\omega t)$ . La corde est reliée en  $x = L$  à un anneau de masse négligeable, susceptible de se déplacer seulement selon  $\vec{e}_y$  et soumis à une force de frottement fluide  $-h \vec{v}$ . Les frottements entre l'anneau et la tige sont par ailleurs négligés, et on note  $\vec{T}(x, t)$  la tension que la partie de la corde à droite de  $x$  exerce sur la partie à gauche de  $x$ .

1) Le dispositif engendre des ondes progressives harmoniques. Proposer la forme de l'onde incidente  $\underline{y}_i$  et de l'onde réfléchie  $\underline{y}_r$  en notation complexe.

2) On pose le coefficient de réflexion  $\underline{r} = \frac{y_r(x=L, t)}{y_i(x=L, t)}$ . Calculer  $\underline{r}$  et montrer qu'une valeur de  $h$  permet d'annuler l'onde réfléchie. On a ainsi conçu un absorbeur d'ondes.

## O2 – 12 Réflexion et transmission sur une discontinuité

Une corde très longue est composée de deux tronçons de masses linéiques  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . La tension est toujours  $T$ . Le noeud en  $x = 0$  est sans masse.

Du côté des  $x < 0$  arrive un ébranlement qu'on prendra sinusoïdal

$$\underline{y}_i(x, t) = \underline{y}_{0i} e^{i(\omega t - k_1 x)}$$

La discontinuité de la corde donne lieu à une onde réfléchie et une onde transmise

$$\underline{y}_r(x, t) = \underline{y}_{0r} e^{i(\omega t + k_1 x)} \quad \text{pour } x < 0 \quad \text{et} \quad \underline{y}_t(x, t) = \underline{y}_{0t} e^{i(\omega t - k_2 x)} \quad \text{pour } x > 0$$

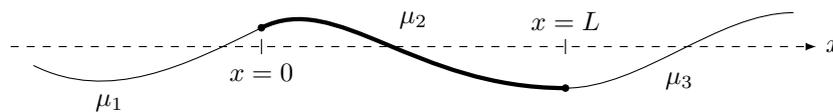
On définit les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude en  $x = 0$  par

$$\underline{r} = \frac{y_r(0, t)}{y_i(0, t)} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{y_t(0, t)}{y_i(0, t)}$$

1) Donner les deux conditions aux limites que doivent vérifier les ébranlements  $\underline{y}_i$ ,  $\underline{y}_r$  et  $\underline{y}_t$ .

2) En déduire les expressions de  $\underline{r}$  et  $\underline{t}$  en fonction de  $\alpha = \sqrt{\mu_2/\mu_1}$ .

3) La corde est à présent constituée de trois morceaux de masses linéiques  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  et  $\mu_3$ . La même onde incidente arrive des  $x < 0$ . Proposer des expressions génériques des ondes résultantes sur les trois morceaux. On notera  $k_1$ ,  $k_2$  et  $k_3$  les modules des vecteurs d'onde.



4) Sous quelles conditions sur  $k_1$ ,  $k_2$  et  $k_3$  n'existe-t-il pas de réflexion sur le premier tronçon ?

## O2 – 11 Corde à sauter

On considère une corde homogène, inextensible, infiniment souple, fixée à ses deux extrémités, et mise en rotation à la vitesse angulaire  $\omega$  autour de l'axe qu'elle occupe au repos.

1) Obtenir l'équation régissant la forme de la corde à sauter. On supposera que la corde tourne suffisamment vite pour pouvoir négliger son poids.

L'équation ne s'intègre pas analytiquement, mais on peut, par exemple, écrire un script python la résolvant et tracer la solution.



## O2 – 10 Étude des vibrations d'une corde verticale

L'axe  $(Ox)$  est vertical ascendant,  $(Oy)$  est horizontal. Une corde infiniment souple, de masse linéique  $\mu$ , de longueur  $L$  est suspendue au point  $A$  dans le champ de pesanteur  $\vec{g}$ . Lorsque la corde est au repos, son extrémité inférieure coïncide avec le point  $O$ .

Son point d'accrochage  $A$  effectue des oscillations horizontales  $y_A(t) = a \cos(\omega t)$ , d'amplitude  $a$  très inférieure à  $L$ . L'extrémité inférieure ne subit aucune contrainte.

Le déplacement quasi horizontal du point d'ordonnée  $x$  de la corde par rapport à sa position d'équilibre est noté  $y(x, t)$ . Dans toute la suite, on suppose que  $y$  et ses dérivées sont très petits, et que le déplacement de la corde ne se produit que dans la direction  $(Oy)$ .

1) Montrer que l'équation de propagation des ondes le long de la corde est :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = g \left( \frac{\partial y}{\partial x} + x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)$$

2) Cette équation est une équation aux dérivées partielles linéaires, mais dont les coefficients ne sont pas constants (le «  $x$  » devant le dernier terme). Les OPPH ne sont dans ce cas pas solutions. Pour résoudre cette équation, on cherche une solution sous la forme

$$y(x, t) = A(x) \cos(\omega t) + B(x) \sin(\omega t)$$

*Le choix de la dépendance temporelle harmonique à la pulsation  $\omega$  provient du fait que la corde est excitée sinusoïdalement à  $\omega$ . L'équation d'onde étant linéaire, il ne peut pas naître d'autres pulsations sur la corde.* Trouver l'équation vérifiée par  $A(x)$  et  $B(x)$ .

3) On peut résoudre l'équation sur  $A(x)$  en cherchant  $A(x)$  sous forme de série entière

$$A(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k$$

Obtenir une relation de récurrence sur les  $\alpha_k$ , en déduire l'expression des  $\alpha_k$  et donner les 3 premiers termes du développement en série entière de  $A$ , ( $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$ ) en fonction de  $\alpha_0$ .

4) Obtenir  $B(x)$  de manière identique. Comment peut-on déterminer les premiers coefficients  $\alpha_0$  et  $\beta_0$  ?

## O2 – 09 Excitation d'une corde par force magnétique

On étudie les petits mouvements dans la direction  $(Oz)$  d'une corde métallique conductrice de longueur  $L$  fixée en ses deux extrémités d'abscisses  $x = 0$  et  $x = L$ . On néglige la pesanteur. La corde est traversée par un courant d'intensité  $I = I_0 \cos(\omega t)$  et est plongée dans un champ magnétique

$$\vec{B} = B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \vec{u}_y$$

1) Établir l'équation du mouvement de la corde.

2) On cherche les solutions en régime forcé sous la forme  $z(x, t) = A(x) \cos(\omega t)$ . Établir l'équation vérifiée par  $A(x)$ .

3) Obtenir explicitement  $z(x, t)$  en cherchant la solution particulière  $A_P(x)$  de l'équation sur  $A(x)$  sous la forme

$$A_P(x) = \alpha \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

4) Discuter la résonance.

## O2 – 13 Shape of a rope

A helicopter is flying horizontally at constant speed. A perfectly flexible uniform cable is suspended beneath the helicopter. Air friction is not negligible.

- 1) What is the equation solved by the shape of the rope?
- 2) We now add a mass  $M$  at the bottom of the rope. What are the new equations solved by its shape?

**Note.** This exercise comes from a youtube video by Veritasium : <https://www.youtube.com/watch?v=q-7y0WUnW4>.

## O2 – 14 Tsunami

(L'exercice est identique à H4-09, tout en proposant une autre méthode de résolution.)

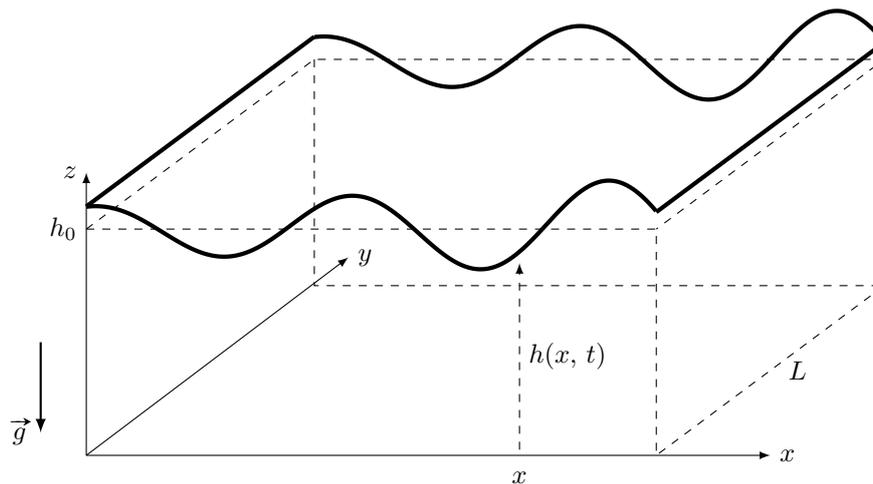
Un tsunami est une onde qui se forme en pleine mer, à la suite d'un mouvement rapide du fond océanique.

### Première partie. Vagues en eau profonde.

L'océan est modélisé par une étendue d'eau de masse volumique constante  $\rho$  dont le fond est le plan  $z = 0$  et la hauteur au repos est noté  $h_0$ . Les vagues sont modélisées comme une perturbation  $\zeta(x, t)$  de cette hauteur. En présence des vagues, on a donc  $h(x, t) = h_0 + \zeta(x, t)$ . On néglige tout effet visqueux et le champ de vitesse dû aux vagues est supposé unidirectionnel

$$\vec{v} = v(x, t) \vec{u}_x$$

On note  $P_0$  la pression atmosphérique,  $c$  la célérité des ondes et on travaillera dans cet exercice en se limitant à l'ordre 1 en  $v/c$  et  $\zeta/h_0$ . Autrement dit,  $v$  et  $\zeta$  sont des infiniment petit d'ordre 1.



- 1) En faisant un bilan de masse sur une tranche d'eau comprise entre  $x$  et  $x + dx$  et de largeur  $L$ , montrer qu'à l'ordre 1 on a

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -h_0 \frac{\partial v}{\partial x}$$

- 2) Les effets visqueux étant négligés, on peut écrire l'équation d'Euler

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad} P + \rho \vec{g}$$

Montrer que

$$P(x, z, t) = -\rho g z + f(x, t)$$

puis déterminer  $f(x, t)$  en fonction de  $\zeta(x, t)$ ,  $h_0$ ,  $\rho$ ,  $g$  et  $P_0$ .

- 3) Montrer que l'accélération convective est négligeable devant l'accélération locale. En déduire une deuxième équation aux dérivées partielles couplant  $v$  et  $\zeta$  :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

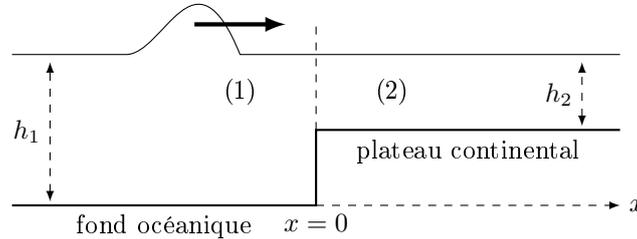
- 4) En déduire que  $v(x, t)$  et  $\zeta(x, t)$  vérifient une équation de d'Alembert et identifier la célérité  $c$ .

## O2 – 15 Tsunami encore

(Suite de O2-14.)

### Deuxième partie. Amplification continentale.

On souhaite modéliser l'évolution du tsunami à l'arrivée près des côtes. On considère pour cela le passage d'une vague sur un changement de fond. La pleine mer occupe le milieu  $x < 0$  (milieu 1) où la profondeur est  $h_1$ , tandis que le plateau continental occupe le milieu  $x > 0$  (milieu 2), où la profondeur est  $h_2 < h_1$ .



5) Les perturbations de hauteur sont modélisées par des ondes progressives harmoniques. Elles s'écrivent en notation complexe

$$\underline{\zeta}(x, t) = \underline{A} e^{j(\omega t - k_1 x)} + \underline{B} e^{j(\omega t + k_1 x)} \quad \text{pour } x < 0, \text{ et } \quad \underline{\zeta}(x, t) = \underline{C} e^{j(\omega t - k_2 x)} \quad \text{pour } x > 0.$$

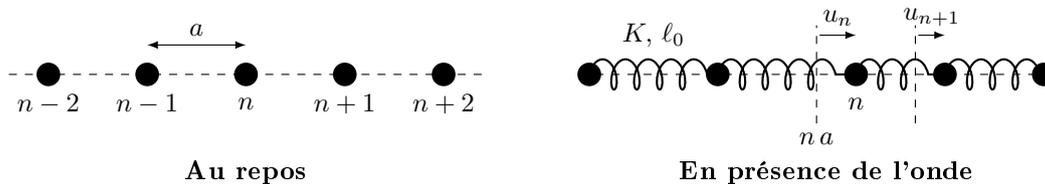
Interpréter chacun de ses trois termes. Quel est le champ de vitesses correspondant dans chaque demi-espace ?

6) Quelles conditions aux limites sont vérifiées en  $x = 0$  ?

7) En déduire le coefficient multiplicatif que subit la hauteur de la vague lorsqu'elle franchit la rupture entre le fond océanique et le plateau continental. Commenter.

## O2 – 16 Ondes de vibration dans un solide ionique

Un solide monoatomique cristallin est modélisé par une chaîne linéaire, constituée d'atomes tous identiques de masse  $m$ . Au repos, ils sont séparés d'une distance  $a$  appelée le pas du réseau. L'atome  $n$  se trouve alors à la position  $x_n^{\text{eq}} = n a$ .



Lorsqu'une perturbation longitudinale passe sur la chaîne, l'atome  $n$  est décalé de sa position d'équilibre. Ce déplacement est noté  $u_n(t)$ .

On modélise ensuite les interactions entre les atomes par des rappels élastiques (force de type ressort entre atomes voisins). La raideur des ressorts est notée  $K$ , et leur longueur à vide  $\ell_0$ .

1) Écrire l'équation du mouvement de l'atome  $n$ .

2) Contrairement au cours, on ne souhaite pas faire une approximation de milieu continu. On cherche alors directement une solution de ces équations couplées sous la forme d'une « onde discrétisée » :

$$u_n(t) = C e^{i(\omega t - k n a)} \quad \text{pour tout } n.$$

Trouver la relation de dispersion, c'est-à-dire le lien entre  $\omega$  et  $k$  pour que l'onde discrétisée soit solution des équations du mouvement. En tracer le graphique.

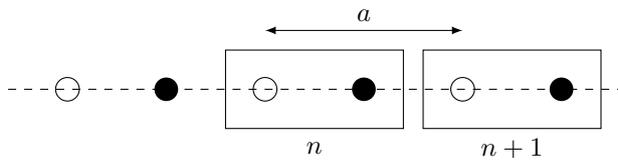
3) Quelle est la pulsation maximale  $\omega_{\text{max}}$  des ondes qui peuvent se propager dans la chaîne d'atomes ?

4) Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe et en donner les limites pour  $k a \rightarrow 0$  et pour  $k a \rightarrow \pi$ .

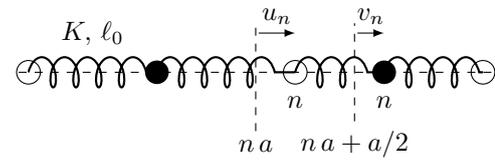
5) Faire un développement limité de la relation de dispersion pour  $k$  petit et commenter.

On passe désormais à un solide ionique, qu'on modélise aussi par une chaîne d'atomes unidimensionnelle. Cette fois la chaîne est composée de deux types d'atomes :  $A$  (blancs) de masse  $m_A$  et  $B$  (noirs) de masse  $m_B$  (penser par exemple à  $\text{Na}^+$  et  $\text{Cl}^-$ ). On note leurs positions d'équilibre

$$x_n^{A,\text{eq}} = n a \quad \text{et} \quad x_n^{B,\text{eq}} = n a + \frac{a}{2}$$



Au repos



En présence de l'onde

Au passage d'une onde acoustique, ils sont déplacés d'une quantité

$$u_n(t) \quad \text{pour les atomes } A, \quad \text{et} \quad v_n(t) \quad \text{pour les atomes } B.$$

6) Écrire les équations du mouvement pour les atomes  $A$  et  $B$  en position  $n$ .

7) On cherche à résoudre ces équations de nouveau par des ondes discrétisées. On note

$$u_n(t) = \alpha e^{i(\omega t - k n a)} \quad \text{et} \quad v_n(t) = \beta e^{i(\omega t - k(n a + a/2))} \quad \text{pour tout } n.$$

Montrer que cette fois, pour un vecteur d'onde  $k$  donné, il y a deux pulsations possibles. On introduira la **masse réduite**  $\mu$  telle que

$$\mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$$

8) Tracer ces deux relations de dispersion sur un graphique. Celle qui ressemble à la relation de dispersion de la chaîne monoatomique est appelée la **branche acoustique** (ou **mode acoustique**) et celle au-dessus est appelée la **branche optique** (ou **mode optique**).

9) Calculer la valeur maximale  $\omega_{\text{max}}$  de la branche optique. Calculer aussi l'écart minimal (appelé *gap*) entre la branche optique et la branche acoustique.

10) Que peut-on dire d'une onde dont la pulsation est comprise dans ce gap ?

11) Pour  $k a \rightarrow 0$ , faire un développement limité à l'ordre le plus bas non nul des deux branches, et commenter le mouvement relatif des atomes  $A$  et  $B$  dans chacun des deux modes.

## O2 – 17 Cordes d'un piano

(*extrait de Centrale PSI 2013*)

Le piano est un instrument de musique à cordes frappées inventé par l'italien Bartolomeo Cristofori au milieu du XVIIIème siècle et perfectionné principalement au XIXème siècle, le piano à queue moderne ayant atteint sa maturité au début du XXème siècle.

Lorsque l'instrumentiste frappe une touche du clavier, celle-ci actionne un mécanisme, qui actionne à son tour un marteau, qui vient frapper une corde. Celle-ci entre alors en vibration libre (tant que la touche est enfoncée). On s'intéresse donc dans cette partie aux vibrations libres d'une corde du piano. Sauf avis contraire, on supposera que la corde peut être supposée sans raideur et on négligera toujours les effets de la pesanteur. La corde de masse linéique  $\mu$  est tendue avec la tension  $T_0$ . Au repos, la corde est rectiligne et parallèle à l'axe horizontal ( $Ox$ ). On étudie les petits mouvements de la corde autour de sa position d'équilibre. On note  $y(x, t)$  le déplacement du point de la corde à l'abscisse  $x$  à l'instant  $t$ . L'axe ( $Oy$ ) est l'axe vertical ascendant.

### A. Mise en équation du mouvement transversal d'une corde de piano sans raideur.

1) Que signifie l'expression « corde sans raideur » ? Qu'entend-on par « hypothèse des petits mouvements » ?

2) Dans le cadre de l'approximation des petits mouvements, établir les deux équations liant les dérivées partielles par rapport à  $t$  et à  $x$  de la vitesse transversale d'un point de la corde  $v_y(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, t)$  et de la projection sur l'axe ( $Oy$ ) de la force de tension exercée à l'abscisse  $x$  par le morceau de corde situé à droite de cette abscisse sur la partie située à gauche  $T_y(x, t)$ . On fera apparaître la tension  $T_0$  en le justifiant.

3) Montrer que la fonction  $y(x, t)$  vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\mu_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (1)$$

Identifier la célérité  $c$  des ondes transversales sur la corde et en donner l'expression. Comment s'appelle cette équation? Citer au moins deux autres phénomènes régis par la même équation.

4) On peut lire dans une documentation technique que « une corde de piano est tendue à 85 kg ». Pouvez-vous en déduire un ordre de grandeur de la tension  $T_0$  d'une corde? Pour une corde en acier donnant la note « La 4 », le diamètre de la corde est de 1,1 mm. La masse volumique de l'acier valant  $\rho(\text{Acier}) = 7,8 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , calculer la célérité  $c$  des ondes transversales sur la corde.

### B. Modes propres d'une corde de piano sans raideur, fixée aux deux extrémités.

La corde est fixée à ses deux extrémités  $x = 0$  et  $x = L$ , ce qui impose les conditions aux limites :  $y(0, t) = y(L, t) = 0$ .

5) Qu'appelle-t-on une onde stationnaire? Montrer que les solutions en ondes stationnaires (physiquement acceptables) de l'équation (1) sont de la forme  $y(x, t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$ . Quelle est la relation entre  $\omega$  et  $k$ ?

6) Qu'appelle-t-on « modes propres » et « fréquences propres » de la corde? Exprimer les fréquences propres  $f_n$  de la corde en fonction de  $c$  et  $L$ . Donner l'expression de la solution  $y_n(x, t)$  correspondant au mode propre numéro  $n$ . Dessiner l'aspect de la corde à plusieurs instants bien choisis pour  $n = 1$ ,  $n = 2$  et  $n = 3$ .

### C. Conséquences sur la conception des cordes d'un piano.

La hauteur du son produit par une corde est fixée par la fréquence  $f$  de son mode fondamental  $n = 1$ . Les notes d'un piano moderne s'échelonnent du « La 0 » (fréquence fondamentale  $f = 28 \text{ Hz}$ ) au « Do 8 » (fréquence fondamentale  $f = 4,2 \text{ kHz}$ ).

7) Redonner la relation liant la longueur  $L$  d'une corde à la fréquence de son fondamental  $f$ .

On rappelle que pour la fréquence fondamentale  $f = 262 \text{ Hz}$ , on a une longueur de corde  $L = 65 \text{ cm}$ . Quelles sont les valeurs extrêmes des longueurs de corde prévues dans l'extrême grave et dans l'extrême aigu?

8) Les longueurs calculées ci-dessus sont excessives dans le grave (problèmes d'encombrement et de fragilisation de la structure à cette échelle) : en pratique, la longueur d'un piano à queue de concert moderne n'excède pas 3 m (la longueur la plus courante étant autour de 2,75 m). La longueur des cordes obéit assez bien à la loi étudiée en question 7 pour les notes au-delà du « Do 4 ». Pour les notes plus graves, on utilise des cordes filées : il s'agit de cordes d'acier, autour desquelles on a enroulé un fil de cuivre. La longueur de corde variant peu dans ce domaine du clavier, expliquer l'intérêt de ce procédé. Pourrait-on envisager de jouer sur la tension  $T_0$  des cordes?

9) On donne la masse volumique du cuivre :  $\rho(\text{Cu}) = 9,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . En assimilant l'enroulement de cuivre à une couche homogène d'épaisseur 1 mm recouvrant le cœur d'acier de diamètre 1,6 mm, et pour la tension  $T_0 = 850 \text{ N}$ , calculer la longueur de la corde du « La 0 » (note la plus grave du piano, de fréquence fondamentale  $f = 28 \text{ Hz}$ ).

### D. Prise en compte de la raideur : dispersion et inharmonicité.

En réalité, à cause de l'élasticité du matériau constituant une corde, il faut prendre en compte sa raideur. Cela est particulièrement vrai pour les cordes de grand diamètre. Il nous faut donc raffiner le modèle adopté jusqu'à présent. On considère toujours que les mouvements de la corde sont transversaux, et contenus dans le plan vertical  $xOy$ . La théorie de l'élasticité montre que la tension  $\vec{T}(x, t)$  n'est plus tangente à la corde et que pour permettre la courbure de la corde, il faut prendre en compte un couple de moment  $\vec{\Gamma} = \pm \Gamma(x, t) \vec{u}_z$  dont l'expression est donnée par

$$\Gamma(x, t) = \frac{\pi r^4 E}{4} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2)$$

où  $r$  désigne le rayon de la corde.  $E$ , appelé le « module d'Young », traduit les propriétés d'élasticité du matériau constituant la corde et s'exprime en Pascal. On considère ici une corde en acier de masse volumique  $\rho(\text{Acier}) = 7,8 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et de module d'Young  $E = 190 \text{ GPa}$ .

La portion de corde comprise entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  est donc soumise aux forces de tension et aux couples suivants :

$$\begin{cases} \vec{T}_g(x, t) = -(T_x(x, t) \vec{u}_x + T_y(x, t) \vec{u}_y) & \text{et} & -\Gamma(x, t) \vec{u}_z & \text{en } x \\ \vec{T}_d(x + dx, t) = T_x(x + dx, t) \vec{u}_x + T_y(x + dx, t) \vec{u}_y & \text{et} & \Gamma(x + dx, t) \vec{u}_z & \text{en } x + dx \end{cases}$$

10) Vérifier l'homogénéité de la relation (2).

11) En appliquant le théorème de la résultante cinétique à la portion de corde entre  $x$  et  $x + dx$ , montrer que  $T_x$  ne dépend que du temps. On supposera que  $T_x$  est en réalité une constante notée  $T_0$ . Établir également une équation aux dérivées partielles liant  $y(x, t)$  et  $T_y(x, t)$ .

12) En appliquant le théorème du moment cinétique barycentrique à la portion de corde entre  $x$  et  $x + dx$ , établir une nouvelle équation aux dérivées partielles liant  $y(x, t)$ ,  $T_y(x, t)$  et  $\Gamma(x, t)$ . À cette fin, on négligera (en justifiant cette approximation) le moment d'inertie de la portion entre  $x$  et  $x + dx$  par rapport à l'axe  $Gz$  (où  $G$  est le centre de masse de la portion de corde).

13) En déduire l'équation aux dérivées partielles régissant les mouvements de la corde

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\pi r^4 E}{4} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

où  $\mu$  désigne toujours la masse linéique de la corde.

On s'intéresse à l'influence de la raideur sur les fréquences propres de la corde. On se place donc dans un mode propre de vibration et on suppose  $y(x, t) = y_0 \cos(kx + \psi) \cos(\omega t)$ .

14) Établir la relation de dispersion  $\omega(k)$  d'un tel mode.

15) Montrer que les fréquences propres de la corde tendue entre ses extrémités fixées en  $x = 0$  et  $x = L$  s'écrivent

$$f_n = \frac{nc}{2L} \sqrt{1 + Bn^2}$$

où  $n$  est un entier naturel non nul,  $c$  la célérité des ondes sur la corde sans raideur et  $B$  une constante qu'on exprimera en fonction de  $E$ ,  $T_0$ ,  $r$  et  $L$ . Pouvez-vous en déduire un des avantages présentés par un piano à queue par rapport à un piano droit ?

16) Tracer sur un même graphique les courbes représentatives de  $f_n$  en fonction de  $n$  pour une corde sans raideur et pour la même corde avec raideur. Commenter.

17) Calculer numériquement  $B$  (on prendra  $L = 0,65$  m,  $r = 0,55$  mm,  $T_0 = 850$  N et  $E = 190$  GPa). En déduire l'expression approchée de l'inharmonicité de raideur  $i_n$ , définie par le rapport  $i_n = (f_n - f_{n0}) / f_{n0}$  où  $f_{n0}$  désigne la fréquence propre du mode  $n$  pour une corde sans raideur.

18) À partir de quel rang  $n$  la fréquence propre  $f_n$  de la corde avec raideur est-elle plus élevée d'un demi-ton que celle de la corde idéale  $f_{n0}$ ? *Donnée : deux notes séparées d'un demi-ton ont des fréquences fondamentales qui sont dans un rapport  $2^{1/12}$ .*

## O2 – 18 Onde thermo-mécanique

On considère un système constitué d'un très grand nombre de pistons de masse  $m$ , de section  $S$ , considérés infiniment fins. Ceux-ci coulissent sans frottement dans un tuyau (de même section  $S$ ) d'axe  $(Ox)$ . Les intervalles entre les pistons sont remplis d'un gaz parfait, de coefficient adiabatique  $\gamma$ .

À l'équilibre, tous les pistons sont distants de  $a$ , et la pression des gaz est  $P_0$ . On note  $x_n^{\text{eq}} = na$  la position d'équilibre du piston  $n$ . Au passage d'une onde, la position de ce piston est décalée de  $u_n(t)$ , si bien que sa position devient  $x_n(t) = na + u_n(t)$ . On suppose les perturbations petites, donc  $u_n(t) \ll a$ . La pression du gaz à gauche du piston  $n$  est notée  $P_n(t)$ .

1) Faire un schéma des pistons à l'équilibre puis un autre schéma hors-équilibre, c'est-à-dire avec des pistons décalés au passage de l'onde.

2) On suppose les transformations des gaz isentropiques ([pouvez-vous le justifier?]). Quelle est alors la pression  $P_n(t)$  au passage de l'onde ?

3) En déduire, par un théorème du centre de masse, les équations couplées vérifiées par les déplacements  $u_n(t)$ .

4) On suppose maintenant que la longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde est très grande devant  $a$ . On se permet alors une approximation de milieux continus, en définissant un **champ de déplacement**  $u(x, t)$  tel que

$$u(x = na, t) = u_n(t)$$

Dans ce contexte, écrire les développements limités à l'ordre 2 de  $u_{n+1}(t) = u(x + a, t)$  et  $u_{n-1}(t) = u(x - a, t)$ .

5) En déduire que le champ  $u(x, t)$  vérifie une équation de d'Alembert. Quelle est la célérité de l'onde? Commenter.