H0-TD

Statique des fluides

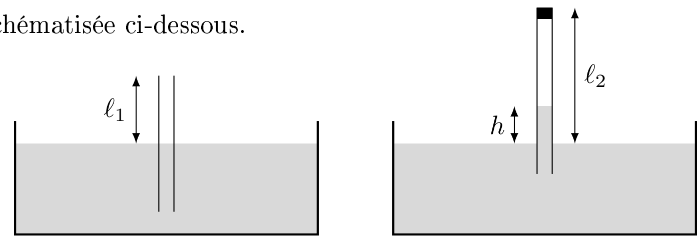
H0 — 01 Cocktail (Résolution de problème)

1) Un glaçon flotte dans un verre rempli à ras bord. Faut-il vider partiellement le verre pour éviter qu'il ne déborde lorsque le glaçon fond ?

Données : masse volumique de l'eau liquide $\varrho_\ell = 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$; et de la glace $\varrho_g = 0{,}92 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

H0 — 02 Expérience avec une paille (Résolution de problème)

On réalise l'expérience schématisée ci-dessous.

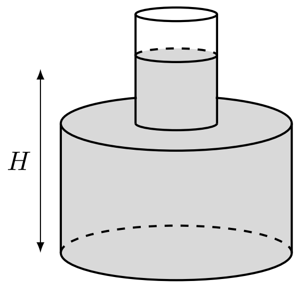


La paille est plongée verticalement dans l'eau ; son extrémité supérieure est libre et dépasse de ℓ_1 la surface. On bouche ensuite hermétiquement (par exemple avec le doigt) le haut de la paille, puis on la soulève lentement jusqu'à ce que son extrémité supérieure, toujours bouchée, se situe à la hauteur ℓ_2 au dessus de la surface.

1) Déterminer la hauteur h d'eau montée dans la paille. On négligera les effets de la capillarité.

2) Application numérique avec $\ell_1 = 10$ cm et $\ell_2 = 30$ cm.

H0 — 03 Entonnoir (Résolution de problème)



On considère l'entonnoir renversé sur une table ci-contre, rempli jusqu'à une hauteur H. Que se passe-t-il si H est trop grand ?

1) Trouver la hauteur limite de remplissage.

H0 — 04 Un modèle d'atmosphère polytropique

On se rend facilement compte que la température de l'atmosphère dépend fortement de l'altitude. On cherche donc dans cet exercice à proposer un meilleur modèle que celui de l'atmosphère isotherme.

Tant que l'altitude n'est pas trop élevée (c'est-à-dire tant qu'on reste dans la troposphère, jusqu'à environ 10 km), les mesures expérimentales de la température sont bien reproduites par une loi linéaire $T = T_0\,(1 - a\,z)$, avec $T_0 = 288$ K et $a = 2{,}41 \times 10^{-2}\ \mathrm{km^{-1}}$.

1) Montrer qu'alors la pression vérifie $P(z) = P_0\,(1 - a\,z)^\beta$, où on exprimera β en fonction de a et de $H = R\,T_0/(M\,g)$. Exprimer de la même façon la masse volumique $\varrho(z)$.

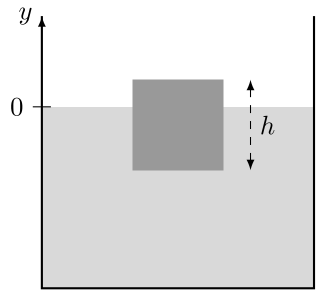
2) Calculer l'altitude $z_{1/2}$ à laquelle la pression est égale à $P_0/2$. Comparer avec la valeur que donnerait la modèle de l'atmosphère isotherme de température T_0.

3) Un bulletin météorologique fournit des données qui permettent d'obtenir la relation $P = 1{,}01 \times 10^5\,(T/288)^{5{,}26}$. Est-ce compatible avec le modèle étudié ?

4) On dit qu'un gaz parfait est en évolution **polytropique** s'il vérifie une relation du type $P\,V^k = \mathrm{Cste}$. Par exemple, une évolution isotherme est une évolution polytropique avec $k = 1$. Déterminer l'exposant k du modèle étudié.

H0 — 08 Oscillations d'un bouchon de liège

On considère un bloc solide homogène (par exemple un bouchon de liège) de section S, de hauteur h et de masse volumique ϱ. Ce bloc flotte à la surface de l'eau de masse volumique ϱ_e. Dans tout l'exercice, on supposera que le bloc est uniquement soumis à son poids et à la poussée d'Archimède (on négligera les frottements). On notera l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$. La largeur du récipient est suffisante pour pouvoir négliger la variation d'hauteur de la surface libre de l'eau.



1) À partir d'un bilan des forces, déterminer la hauteur h_{eq} dont le bloc est immergé à l'équilibre.

2) Établir l'équation du mouvement du bloc. Quel type général de système physique l'équation obtenue décrit-elle ?

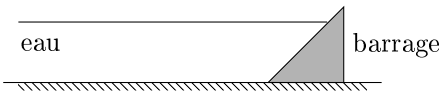
3) Le bloc est soulevé verticalement de sa position d'équilibre d'une hauteur $\delta h < h_{\text{eq}}$. À $t = 0$, il est lâché sans vitesse initiale. Résoudre l'équation précédente avec ces conditions initiales.

4) Calculer la valeur numérique de la période T du mouvement.

Données. $\varrho_e = 10^3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $\varrho = 2\times 10^2\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $g = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ et $h = 5$ cm.

H0 — 05 Barrage (Résolution de problème)

On obstrue un canal à l'aide d'un barrage triangulaire mobile, comme présenté sur le schéma ci-dessous. On note L la largeur du canal, α les deux angles (identiques) du barrage, h la hauteur d'eau, M la masse du barrage, H la hauteur du barrage, et enfin f le coefficient de frottement entre le barrage et le canal.



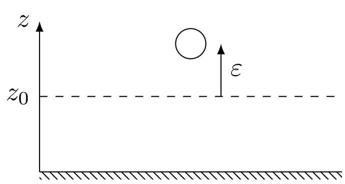
1) Traduire l'équilibre du barrage. Quelle hauteur d'eau maximale peut-il supporter ?

H0 — 06 Oscillations d'un ballon

Un petit ballon de baudruche, sphérique de centre C, de rayon R, et de volume V, contient une masse m de gaz parfait de masse molaire M. La masse de l'enveloppe est négligeable. Le ballon est en équilibre dans une pièce où règne un faible gradient de température $\mathrm{d}T/\mathrm{d}z = a > 0$ entre le plancher et le plafond. L'altitude d'équilibre de C est z_0 par rapport au plancher. On note T_0 et ϱ_0 la température et la masse volumique du gaz à l'altitude d'équilibre.

1) On considère que la pression régnant dans la pièce est uniforme. Montrer que le ballon abandonné au voisinage de sa position d'équilibre va effectuer des oscillations dont on déterminera la pulsation ω. Déterminer la valeur numérique de la période τ pour un ballon soumis à un gradient $a = 1\ \text{K}\cdot\text{m}^{-1}$ et pour $T_0 = 300$ K.

2) On tient maintenant compte de la variation de la pression avec l'altitude. On note p_0 la pression à l'altitude d'équilibre. Quelle est la nouvelle pulsation des oscillations ?



H0 — 07 Estimation de la masse de l'atmosphère (Résolution de problème)

1) En raisonnant sur une colonne verticale d'atmosphère (de section S très petite devant la surface de la Terre), obtenir une estimation de la masse de l'atmosphère. On pourra utiliser que l'essentiel de l'atmosphère est compris entre le sol et $H = 8$ km d'altitude.

Données : on donne le rayon de la Terre $R = 6400$ km.

H0 — 09 Champ de pression dans l'océan

(extrait de Centrale PSI 2 2022)

« [...] Cameron reached the bottom of the Challenger Deep, the deepest part of the Mariana Trench. [...] Measured by Cameron, at the moment of touchdown, the depth was 10,898 m (35,756 ft). It was the fourth-ever dive to the Challenger Deep and the second crewed dive [...]. It was the first solo dive and the first to spend a significant amount of time (three hours) exploring the bottom ». [Wikipédia]

Le réalisateur James Cameron a mené une expédition en 2012 dans la fosse des Mariannes, fosse océanique la plus profonde connue à ce jour, avec son sous-marin nommé *DeepSea Challenger*. Parmi d'autres anecdotes relatives à ce record, on lit sur Wikipédia : *« A Rolex watch, "worn" on the sub's robotic arm, continued to function normally throughout the dive ».*

La contrainte principale à laquelle est soumis un sous-marin est celle liée à la pression exercée par le fluide environnant sur la structure de l'habitacle. L'évaluation des pressions rencontrées au fond de l'océan est donc cruciale pour déterminer les efforts que devront supporter les parois qui protègent le pilote.

On se place dans un repère cartésien de centre O, placé sur l'interface eau-air, et d'axe (Oz) descendant.

1) On suppose que le champ de pression P du fluide vérifie la relation

$$\rho\,\vec{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P = \vec{0}$$

(la démonstration de cette relation n'est pas attendue). Proposer une interprétation physique de celle-ci et indiquer la signification de chacun des termes.

2) On suppose dans un premier temps que l'eau de mer est un fluide incompressible de masse volumique $\varrho_0 = \varrho(z=0)$. En déduire l'expression de la pression $P(z)$ à une profondeur donnée z, en fonction de P_0 la pression atmosphérique, g l'intensité de pesanteur uniforme qui règne dans l'océan, ϱ_0 et z.

3) Lorsqu'on approche des profondeurs atteintes par James Cameron, le modèle du fluide incompressible peut éventuellement être remis en cause. On conserve l'hypothèse isotherme, mais on cherche à modéliser les variations de la masse volumique en introduisant le coefficient de compressibilité isotherme de l'eau comme

$$\chi_T = -\frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_T$$

On considère désormais que l'océan est isotherme, mais que la masse volumique ϱ est variable. Montrer que

$$\chi_T = \frac{1}{\varrho}\left.\frac{\partial \varrho}{\partial P}\right|_T$$

4) On suppose que la grandeur χ_T est une constante. En utilisant la relation de la statique des fluides, montrer que la masse volumique ϱ varie avec la profondeur z selon

$$\varrho(z) = \frac{\varrho_0}{1 - \varrho_0\,g\,\chi_T\,z}$$

5) En déduire que l'on a

$$P(z) = P_0 - \frac{1}{\chi_T}\ln\left(1 - \varrho_0\,g\,\chi_T\,z\right)$$

6) La pression dans la fosse des Mariannes (profondeur $z_{\max} = 10{,}9$ km) a été mesurée à $1{,}13 \times 10^8$ Pa. Le modèle prenant en compte la compressibilité de l'eau est-il suffisant pour prédire la pression à de telles profondeurs ? Proposer une amélioration de ce modèle.

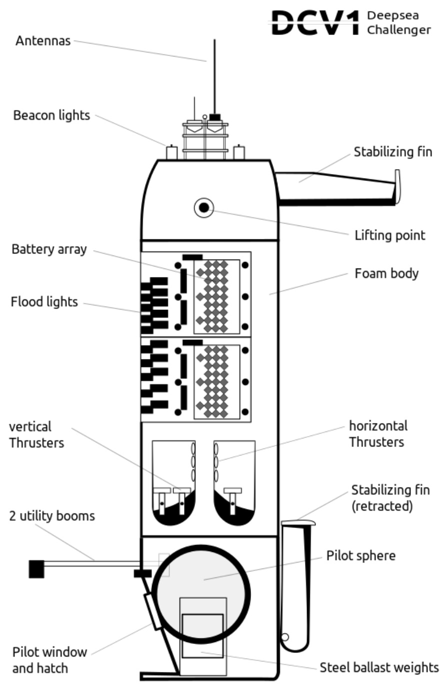
Pour résister à une telle pression, il faut renforcer toutes les structures porteuses et notamment équiper la zone habitable sphérique de parois d'une épaisseur de plus de 5 cm d'acier. Le surpoids lié à cette structure est contrebalancé par un ensemble de plaques de mousse spécialement développées qui assure la flottabilité du sous-marin.

Données. Accélération de la pesanteur $g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Masse volumique $\varrho_0 = 1{,}02 \times 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Coefficient de compressibilité isotherme $\chi_T = 4{,}41 \times 10^{-10}\ \mathrm{Pa^{-1}}$.

H0 — 10 Plongée et remontée de *DeepSea Challenger* (Résolution de problème)

(suite de H0-09, extrait de Centrale PSI 2 2022)

L'économie d'énergie est également critique. La plongée au fond de la fosse, ainsi que la remontée en surface, sont essentiellement assurées par les forces gravitaires. C'est donc un ensemble de masses attachées à la coque du sous-marin, appelées ballast qui permettent la plongée. Leur abandon au fond de la fosse en fin d'expédition déclenche la remontée du sous-marin. Ainsi, l'usage des propulseurs, alimentés par un circuit électrique, peut être réservé à l'exploration locale de la fosse.



Le déplacement d'un solide dans un fluide visqueux s'accompagne généralement d'une force dite de trainée qui dépend notamment de la forme du solide et du régime d'écoulement. La norme de cette force, opposée au mouvement, peut s'écrire sous la forme

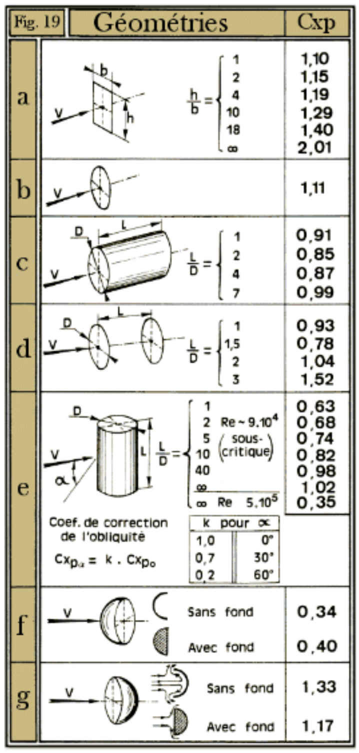
$$F = \frac{1}{2}\, C_x\, \varrho\, S\, v^2$$

où v est la vitesse du solide, S sa surface frontale, ϱ la masse volumique du fluide et C_x un coefficient empirique sans dimension. La figure ci-contre donne la valeur du coefficient C_x pour diverses formes géométriques.

Les relevés effectués lors de la première expédition montrent que la descente du sous-marin, à vitesse quasi-constante, a duré environ 2h30 et a permis d'atteindre une profondeur de 10,9 km. Le même trajet n'a pris que 70 min lors du retour à la surface.

1) En explicitant clairement votre démarche ainsi que les hypothèses que vous serez amené à formuler, évaluer la masse de ballast qui a été libérée pour permettre la remontée du sous-marin.

Données. Profondeur de la fosse des Mariannes $z_0 = 10{,}9$ km. Diamètre équivalent du sous-marin $D_{DC} = 2{,}11$ m. Hauteur du sous-marin $H_{DC} = 7{,}30$ m.



H0 — 11 Risque d'hypoxie (Résolution de problème)

(suite de H0-09 et H0-10, extrait de Centrale PSI 2 2022)

La puissance électrique disponible assure, entre autres, le fonctionnement du système de contrôle de l'atmosphère de la capsule pendant plus de 50 heures. Ce système permet de maintenir une composition de l'air intérieur de l'habitacle correspondant à celle de l'atmosphère terrestre au niveau de la mer. On s'intéresse à la durée de survie du pilote au fond de l'océan en cas de panne de ce système. Le dimensionnement des systèmes de survie en cas d'incidents divers s'appuie sur les données physiologiques moyennes d'un adulte :

- pression partielle en dioxygène pour que l'air soit respirable $P_{O_2} > P_{O_2,\ell} = 8{,}0 \times 10^3$ Pa ;
- volume moyen d'air inspiré au repos $V_p = 0{,}50$ L ;
- fréquence respiratoire au repos $f = 0{,}25$ Hz.

On considère que, lors d'une inspiration, un être humain inspire toujours le même volume V_p d'air dont la composition est celle de l'air ambiant dans lequel il se trouve. L'étude d'un cycle respiratoire montre que seul un quart du dioxygène inspiré est effectivement consommé par les poumons. On admettra que la quantité de matière de dioxyde de carbone exhalée est égale à la quantité de matière de dioxygène consommée par les poumons.

1) Quelle est la composition moyenne de l'air présent dans l'atmosphère terrestre au niveau de la mer ?

2) On suppose que le système de contrôle de l'atmosphère cesse de fonctionner et on note n_i et $P_{O_2 i}$ respectivement la quantité de matière de dioxygène présente dans l'habitacle et la pression partielle en dioxygène après la i-ème respiration après l'arrêt de ce système. En explicitant les hypothèses utilisées, établir la relation entre n_{i+1} et n_i, en fonction de V et V_p, où V est le volume libre de l'habitacle.

3) En déduire une relation entre $P_{O_2 i}$, $P_{O_2 0}$, V_p, V et i.

4) En déduire le nombre d'inspirations que peut faire le pilote, puis sa durée de vie sans apport extérieur de dioxygène.

Données. Voir H0-10 pour la géométrie de l'habitacle. On donne son diamètre $D = 1{,}09$ m.

H0 — 12 Atmosphère adiabatique

(exercice qui étudie le même modèle d'atmosphère que H0-04, en demandant des calculs différents)

On étudie un atmosphère, dit « adiabatique », dont la caractéristique est de vérifier la loi suivante, où γ est le coefficient adiabatique de l'air

$$P = P_0 \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^\gamma$$

1) Rappeler la définition de γ.

2) L'air est supposé être un gaz parfait. Établir la relation suivante et exprimer α.

$$\frac{\mathrm{d}T}{T_0} = -\alpha\,\mathrm{d}z$$

3) En déduire $T(z)$, $P(z)$ et $\varrho(z)$.

4) Montrer que dans ce modèle, l'atmosphère est de taille finie $h_{\lim}$. Donner $h_{\lim}$ et commenter.

H0 — 13 Atmosphère standard

1) On donne pour modèle d'atmosphère

$$\varrho(z) = \varrho_0 \frac{H-z}{H+z} \qquad \text{et} \qquad T(z) = T_0 - \lambda z$$

avec ϱ la masse volumique de l'air et T sa température. Les coefficients du modèle sont

$$H = 20 \text{ km} \qquad \text{et} \qquad \lambda = 6{,}5 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$$

Ce modèle décrit assez bien la réalité de l'atmosphère terrestre et est parfois utilisé en aéronautique. Il n'est cependant valable que dans la troposhère ($z < 11$ km). Donner l'exposant polytropique de ce modèle, c'est-à-dire le coefficient γ_s tel que

$$P \propto \varrho^{\gamma_s}$$